UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A RESOLUÇÃO DE TAREFAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO 2.º GRAU: UM ESTUDO NO 8.º ANO

Ana Cláudia Morgado Antunes

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Mestrado em Ensino de Matemática

2013

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A RESOLUÇÃO DE TAREFAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO 2.º GRAU: UM ESTUDO NO 8.º ANO

Ana Cláudia Morgado Antunes

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientada
pela Professora Doutora Ana Cláudia Henriques e coorientada pela
Professora Doutora Suzana Nápoles

Mestrado em Ensino de Matemática

2013

À minha mãe, pela sua sabedoria e entendimento das coisas.
À memória do meu avô, Abílio Morgado.
Tenho saudades tuas.

Agradecimentos

"Tudo o que um sonho precisa para ser realizado é alguém que acredite que ele pode ser realizado." (Roberto Shinyashiki)

Há tanto para agradecer...

Em primeiro lugar ao Altíssimo! Aquele que me ajudou a manter a cabeça erguida, o meu refúgio e a minha força, a minha alegria, a estrela que me guia na escuridão, o amor da minha vida e da minha alma.

À minha família, em particular aos meus pais, irmã e sobrinhos que sempre me apoiaram e sempre acreditaram no meu trabalho.

À professora Ana Henriques, a minha orientadora, pela forma como me acompanhou ao longo deste trabalho, pelo apoio, sugestões, conselhos e críticas pertinentes para superar as dificuldades sentidas. Assim como, pela competência, sabedoria, disponibilidade total e paciência. E acima de tudo, por ter acreditado em mim na realização deste trabalho.

À professora Suzana Nápoles, a minha coorientadora, pela sua cordialidade, disponibilidade, sugestões, críticas e orientação nos conceitos matemáticos.

Quero, também, agradecer à professora Cláudia Torres por me ter recebido nas suas aulas, pela amizade, disponibilidade, conselhos, confiança e pelos ensinamentos.

Tenho de deixar aqui, também, os meus sinceros agradecimentos a todos os membros da comunidade escolar da Escola Básica 2, 3 de Fernando Pessoa, que me possibilitaram o desenvolvimento desta investigação. Assim como, aos alunos da turma envolvida no estudo, pelo esforço, participação e interesse.

Às minhas melhores amigas Cláudia, Cristina, e Ana Maria, porque nunca se cansam de me ouvir, nem de me fazer rir e pelo apoio incondicional. Por serem para mim um porto seguro e porque é com elas que cresço e tento tornar-me um pouco melhor todos os dias.

Aos meus colegas de Mestrado, em especial à minha colega de estágio Zita, pelos momentos que passámos juntas, pela partilha de experiência, interajuda, colaboração, compreensão e amizade. Assim como, à minha colega Ângela, pelos momentos de desabafo, pela força e interesse demonstrado, não podendo deixar de referir a sua preciosa ajuda informática.

E por fim, mas não em último, ao Hugo por tão generosamente me ter concedido a oportunidade de viver na luz, no calor, na segurança e na alegria da verdade, e por ter sempre acreditado em mim, pela cumplicidade, motivação, paciência e por tudo o que passámos juntos e pelo amor que nos une.

Agradeço a todos do fundo do meu coração.

Resumo

O estudo que apresento neste relatório surge das minhas preocupações com as dificuldades que os alunos evidenciam, frequentemente, na resolução de equações do 2.º grau e foi desenvolvido no âmbito da lecionação da unidade "Sequencias e regularidades. Equações", no tema da Álgebra, numa turma do 8.º ano da Escola Básica 2, 3 de Fernando Pessoa. Tendo em conta as orientações curriculares atuais para o ensino e aprendizagem deste tópico, este estudo teve como objetivo compreender, de que modo, os alunos de uma turma do 8.º ano de escolaridade resolvem tarefas envolvendo equações do segundo grau. Em particular, procurei saber quais as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas envolvendo equações do 2.º grau; quais os principais erros e dificuldades que evidenciaram na resolução dessas tarefas e quais os conhecimentos que mobilizaram para as resolverem.

A recolha de dados tem por base a observação do trabalho dos alunos, durante as aulas e as suas resoluções escritas das tarefas, tendo uma delas um carácter avaliativo.

A análise dos dados recolhidos evidencia que os alunos desenvolveram o seu pensamento algébrico. Na resolução de problemas, os alunos começam por evidenciar dificuldades na tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica, aspeto que tendem a aperfeiçoar no decorrer da unidade de ensino. Quanto às estratégias utilizadas, os alunos optam, numa primeira fase, pelo método de tentativa e erro mas, em geral, abandonam este método, optando pela resolução algébrica através da lei do anulamento do produto, evidenciado a sua aprendizagem. Apesar de compreenderem e saberem aplicar os princípios de equivalência, as dificuldades na utilização dos casos notáveis da multiplicação, na interpretação das letras e na alteração do papel atribuído ao símbolo "=" estiveram na base dos erros cometidos na resolução das equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita.

Palavras-chave: Álgebra; Dificuldades dos alunos; Equações do 2.º grau; Pensamento algébrico; Representações; Resolução de problemas.

Abstract

The study I'm presenting in this report comes from my concerns about the difficulties that students often have in solving equations of the 2nd degree and the study was developed in the scope of teaching the unit "Sequences and regularities. Equations", which is in the theme of algebra, in a class of the 8th grade in School E.B 2, 3 Fernando Pessoa. Given the current curriculum guidelines for the teaching and learning of this topic, this study aims to understand how the students in a class of the 8th grade solve tasks involving equations of the 2nd degree. In particular, I wanted to know what strategies were used by students when solving tasks involving equations of the 2nd degree, what are the main errors and difficulties that the students evidence in solving these tasks and how they mobilize their knowledge related to equations of the 2nd degree to solve problems.

The gathering of data was based of direct observation of student's work during class and their written resolutions of the tasks, one of them being an evaluation task.

The data analysis shows that the students developed their algebraic thought. When solving problems, the students begin showing difficulties in translating the natural language to the algebraic form, but they tent to improve in this aspect throughout the teaching unit. As far as the strategies, the students chose, in the beginning, for the trying and failing method but, in general, they abandon this method and chose to use algebra using the factoring by inspection method, showcasing their improving knowledge. Despite knowing and being able to use the equivalence principles, the difficulties in using the special case binomials, interpreting the letters and the alteration of the significance imbedded in the symbol "=", where the cause of the errors made when solving 2nd degree incomplete equations with one unknown value.

Keywords: Algebra, Algebraic thinking; Equations of the second degree; Problem solving; Representations; Students' difficulties.

Índice

Índice de Anexos

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Capítulo 1

Introdução

O presente relatório da Prática de Ensino Supervisionada, de cariz investigativo, tem por base um estudo realizado no âmbito da lecionação que efetuei na unidade “Sequências e regularidades. Equações”, numa turma do 8.º ano de escolaridade da Escola Básica 2, 3 de Fernando Pessoa, no decorrer do ano letivo 2012/2013. Nesta unidade, propus-me trabalhar com os alunos diversas tarefas que envolvem equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, procurando concretizar as indicações metodológicas do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007), de modo a compreender as estratégias que adotam e as dificuldades que manifestam na sua resolução. Neste capítulo, apresento as motivações que me levaram à realização deste estudo o seu principal objetivo e as questões de investigação. Concluo com uma visão geral da organização do trabalho.

1.1 Motivações e pertinência do estudo

Enquanto aluna, a Matemática foi, desde sempre, a minha disciplina preferida. E desde os meus tempos de aluna na primária, quando alguém me perguntava: “O que queres ser quando fores grande?”, respondia sempre: “Professora de Matemática”.

Sempre me questionei sobre o porquê deste tema – Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita – ser um dos mais difíceis de aprendizagem para a maioria dos meus colegas. Lembro-me, também, de me sentir envolvida e desafiada em busca de estratégias de resolução de tarefas e, por vezes, os meus colegas pediam-me para detetar os seus erros nas suas resoluções. Não deixa de ser curioso o facto de ter tido um ensino expositivo, ou seja, muito baseado no treino de “habilidades” e no entanto, sempre, adorei a disciplina de Matemática e todos os meus professores de Matemática. As aulas que os meus colegas gostavam eram aquelas que eu considerava monótonas e enfadonhas, porque baseavam-se, apenas e somente, na resolução de exercícios, tantos quantos os necessários para rotinar determinados procedimentos de cálculo. As aulas que só eu adorava e que faziam sentido, para mim, eram aquelas em que resolvíamos problemas.

Mais presentemente, os meus alunos e explicandos tendem a evidenciar dificuldades neste tema, como por exemplo, na conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica e cometem, bastantes, erros na resolução de equações, daí ter considerado interessante explorar esta problemática. Tenho constatado, ao longo da minha carreira profissional, que muitos dos bloqueios dos alunos com a Matemática relacionam-se com a ausência do verdadeiro significado para os conceitos, porque não são aprendidos, apenas ensinados. Um grande número de alunos vê a Álgebra como algo inatingível e abstrato e limita-se a repetir procedimentos rotineiros – não chegando, assim, a ocorrer qualquer aprendizagem significativa. Como, futura, profissional de ensino, não posso ficar indiferente a esta situação.

A literatura confirma estas minhas perceções sobre as diversas dificuldades que os alunos, usualmente, evidenciam no trabalho com equações do 2.º grau (por exemplo, Ponte, Branco & Matos, 2009) e salienta a necessidade dos professores desenvolverem nos alunos a linguagem e o pensamento algébrico, as suas capacidades de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de fazer com que utilizem estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos (Ponte et al., 2007).

Mantenho a prioridade de aperfeiçoar continuamente a minha prática letiva e estou convicta de que uma das formas de o conseguir é tentando contribuir para uma diferente visão da Álgebra e da resolução de equações, em particular, e promover junto dos alunos uma perspetiva mais atual desta área da Matemática, de modo a poderem entender o significado da representação simbólica, pensar genericamente e a valorizar a linguagem algébrica como meio de expressar ideias.

O meu objetivo pessoal, com este estudo, será não só identificar os erros e dificuldades, mas entender as causas que conduzem os alunos a cometer este tipo de erros ou a experimentar dificuldades no capítulo da Álgebra, em particular, no estudo das equações e ajudá-los a ultrapassá-las. Além disso, pretendo estudar as estratégias e representações, utilizadas pelos alunos, e compreender o modo como mobilizam os conhecimentos anteriores.

Estou confiante de que uma das estratégias para conseguir aprimorar a minha prática letiva é tentar compreender o pensamento algébrico dos alunos. Como indicam Ponte, Branco e Matos (2009), o pensamento algébrico implica ser capaz de pensar de modo abstrato numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Estes autores referem que o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas – que serão desenvolvidas no capítulo seguinte.

É também esta a perspetiva subjacente ao *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007), quando menciona que o grande objetivo do ensino da Álgebra é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. No propósito principal de ensino, o programa associa este pensamento à "capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos" (p. 55).

A crença de que a resolução de problemas favorece a aquisição de modos de pensar que, por sua vez, conduzem a uma aprendizagem significativa da linguagem algébrica. Também, as orientações curriculares nacionais e internacionais salientarem esta atividade matemática como experiência a proporcionar aos alunos e igualmente, como parte integrante de toda a aprendizagem matemática (DEB, 2001; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007) levando-me a abarcar também, neste estudo, a resolução de problemas como fator de aproximação ao pensamento algébrico dos alunos.

Ancorado à resolução de problemas devem estar o raciocínio e a comunicação matemática (Ponte et al., 2007). O presente estudo privilegia estas capacidades transversais, procurando proporcionar aos alunos um contexto que lhes permita construir conceitos e descobrir relações, e encontra-se pensado em torno de questões relacionadas com a aprendizagem das equações do 2.º grau, as quais possibilitam uma abordagem de diversas ideias essenciais para promover o estudo da Álgebra.

1.2 Objetivo e questões de estudo

O objetivo do estudo é compreender o pensamento algébrico dos alunos do 8.º ano na manipulação de expressões algébricas, em particular quando resolvem tarefas envolvendo equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita. Com este intuito formulei as seguintes questões que serão objeto do meu estudo:

i. Como procedem e que dificuldades evidenciam os alunos na interpretação dos enunciados de tarefas que envolvam equações do 2.º grau, em particular no que se refere a aspetos de tradução do problema por uma equação?

ii. Quais as estratégias que os alunos utilizam na resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita? Que erros e dificuldades evidenciam?

iii. Quais os conhecimentos anteriores que os alunos mobilizam para resolver tarefas envolvendo equações do 2.º grau?

Este estudo tem por base uma unidade de ensino que pretende, igualmente, proporcionar a oportunidade dos alunos desenvolverem o seu pensamento algébrico e a autoconfiança e autonomia necessárias para interpretar, analisar e decidir, tanto em contextos escolares como no dia-a-dia. Assim como, desenvolver as três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática: resolução de problemas, raciocínio matemático e a comunicação matemática (Ponte et al., 2007).

A resolução de problemas assume um papel fundamental em todos os ciclos, principalmente no 3.º ciclo, onde as aprendizagens realizadas pelos alunos nos diferentes temas permitem-lhes aprofundar a sua capacidade de resolução de problemas. Esta capacidade transversal é importantíssima, porque permite a aplicação de conhecimentos e técnicas adquiridos anteriormente, e contribui para o desenvolvimento de novas aprendizagens. Igualmente importante é compreender que processos de raciocínio são usados na realização de diferentes tipos de tarefas matemáticas.

Por fim, a comunicação matemática é a terceira capacidade transversal a que o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007) dá especial destaque. A comunicação está sempre presente na sala de aula, quer seja dominada ou não pelo professor. E o que se espera dos alunos, do 3.º ciclo, é que progridam "na fluência e no rigor com que se exprimem, oralmente e por escrito, tanto na linguagem natural como na linguagem matemática, usando a notação e a simbologia específica dos diversos tópicos matemáticos e desenvolvem a sua capacidade de interagir num grupo e na turma" (p. 62).

1.3 Organização do estudo

Relativamente à estrutura do trabalho, começo por apresentar as minhas motivações pessoas, baseadas na experiencia e orientações curriculares, o objetivo e as questões deste estudo.

No segundo capítulo – "Enquadramento da problemática e orientações curriculares" – apresento o quadro teórico que fundamenta a problemática do estudo e, em particular, a unidade didática desenvolvida, com referência à literatura existente e às orientações curriculares para a Matemática do Ensino Básico.

O capítulo seguinte "Unidade de ensino sobre equações do 2.º grau" está relacionado com a proposta pedagógica para esta subunidade de ensino, onde faço uma breve caracterização da escola e da turma; descrevo e justifico os seus princípios gerais; explícito alguns dos conceitos matemáticos envolvidos; as opções tomadas na planificação, com destaque para as estratégias de ensino, as tarefas e recursos e a avaliação a serem utilizados nas aulas. Ainda neste capítulo, descrevo brevemente as aulas realizadas.

Os "Métodos de recolha de dados" surgem como quarto capítulo, onde apresento e fundamento a escolha de determinados instrumentos para recolha de dados.

No quinto capítulo intitulado por "Apresentação e Análise de dados", procuro apresentar e analisar globalmente os dados referentes ao desempenho dos alunos participantes neste estudo. Esta análise centra-se nos aspetos considerados mais relevantes para responder às questões do estudo.

Por fim, o último capítulo, “Reflexão sobre o trabalho realizado”, onde faço uma síntese do estudo, apresento as principais conclusões, procurando responder às questões de investigação, e reflito sobre a minha prática letiva, fazendo o balanço das aulas lecionadas e das minhas aprendizagens.

Capítulo 2

Enquadramento da problemática e orientações curriculares

2.1 O ensino e a aprendizagem da Álgebra

Na educação matemática não existe consenso relativamente ao que significa pensar algebricamente. Lins e Gimenez (1997) consideram que pensar algebricamente significa produzir significado para as situações e apontam dois objetivos fundamentais para o ensino e aprendizagem da Álgebra: permite que os alunos produzam significados para a Álgebra e desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente. Para tal ser possível, estes autores sugerem uma proposta de trabalho assente em significados, não em conteúdos, nos quais se possa explorar ou tematizar certos aspetos, introduzir novas considerações e, com base nos resultados, torná-los seguros e familiares para os alunos, ou seja, nas tarefas a propor, aos alunos, deve estar contemplado os campos conceptuais já adquiridos e proporcionar uma evolução progressiva de novos conceitos.

Segundo Kaput (1999), o pensamento algébrico, para além de manipular expressões e resolver equações, envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, identificar e interpretar situações e resolver problemas. Este autor defende que a introdução à Álgebra deve ser feita através de generalizações com base nas experiências dos alunos e não pela aprendizagem de regras de manipulação simbólica.

Este autor apresenta cinco áreas do pensamento algébrico, intrinsecamente relacionados entre si:

(i) A *generalização e formalização de padrões e restrições*, em que considera a generalização como sendo um alargamento da comunicação e do pensamento para além das situações concretas e a formalização como sendo a expressão dessa generalização numa linguagem mais ou menos formal;

(ii) A *manipulação de formalismos*, guiada sintaticamente, em que critica os exercícios rotineiros e sem significado presentes no ensino da manipulação algébrica que não contribuem em nada para a aprendizagem com compreensão;

(iii) O *estudo de estruturas abstratas*, defendendo que estas devem ser ensinadas para a compreensão, partindo das experiências dos alunos e relacionando-as com outros temas matemáticos;

(iv) O *estudo de funções, relações e de variação conjunta*, considerando ser possível ensinar a noção de função logo no início da escolaridade sem recorrer a fórmulas ou valores numéricos;

(v) A *utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos*.

Mais recentemente, Kaput (2008) afirma que estas cinco áreas podem dividir-se em dois aspetos fundamentais, o primeiro integra os dois primeiros itens, que designa como "aspetos nucleares" (*core aspects*) da Álgebra, o segundo corresponde aos restantes pontos que o autor considera os "ramos" (*strands*) deste domínio com expressão na Matemática Escolar.

Segundo a brochura da Álgebra (Ponte, Branco & Matos, 2009), o pensamento algébrico evidencia três vertentes: *Representar*, esta refere-se à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação; *Raciocinar*, ou seja, o deduzir e o generalizar e *Resolver problemas*, esta vertente inclui modelar situações e passar pelo uso de diversas representações de objetos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios. O quadro 2.1 apresenta as vertentes fundamentais do pensamento algébrico.

Segundo, os mesmos autores aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Restringir a atividade algébrica à manipulação simbólica equivale a reduzir a riqueza da Álgebra apenas a uma das suas facetas.

O desenvolvimento do pensamento algébrico é essencial para o domínio da Álgebra. Para Fouche (1997) um aluno algebricamente competente é um "bom" aluno em matemática. No entanto, para alguns alunos a Álgebra ainda é vista como um conjunto de símbolos, "uma matéria muito complicada" que só existe "para lhes dificultar a vida" (Barbosa, 2007).

Representar	▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
Resolver problemas	▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Quadro 2.1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico (Adaptado de Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 11).

Segundo Ponte (2005a), um aluno que não entenda medianamente a linguagem abstrata da Álgebra e não tiver a habilidade de a aplicar na resolução de diferentes problemas e situações fica bastante limitado na sua competência matemática.

Perante isto, o NCTM (2007) refere que tornar o pensamento algébrico acessível a todos os alunos é um desafio que se coloca à educação matemática. No *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007), o pensamento algébrico adota uma posição de destaque, surgindo como uma competência a desenvolver desde o primeiro ciclo.

A aprendizagem da Álgebra no 3.º ciclo é um aprofundar dos conhecimentos estudados anteriormente – proporcionalidade direta como função, identificar relações e utilizar linguagem simbólica para as representar, e o estudar padrões geométricos e regularidades de forma a obter o termo geral – é, também, um introduzir de novos conceitos, nomeadamente, o estudo da proporcionalidade inversa, trabalhada com funções; e uma iniciação ao estudo das equações do 1.º e 2.º grau a uma incógnita, sistemas de equações do 1.º grau, e inequações e funções associadas a contextos reais (Ponte et al., 2007).

Segundo as indicações metodológicas do *Programa de Matemática* (Ponte et al., 2007), a abordagem à álgebra no 3.º ciclo deve ter em conta:

- o estudo de relações de diversos tipos (equações, inequações e funções) e da variação, bem como o trabalho com tarefas que envolvam atividades de simbolização e de modelação [...] é importante que sejam proporcionadas aos alunos experiências informais antes da manipulação algébrica formal;

- a aprendizagem [...] deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efetuando cálculos a partir de expressões algébricas substituindo letras por valores numéricos;
- o conceito de variável, pela sua complexidade, justifica que os alunos explorem situações variadas em que surjam letras (nomeadamente, em equações e fórmulas) e discutam os seus significados. […] os alunos devem fazer uma transição progressiva da linguagem natural para a linguagem algébrica;
- as tarefas [...] devem privilegiar a resolução de problemas e a modelação de situações, usando conceitos e procedimentos algébricos de complexidade crescente, sem perder de vista a consolidação dos procedimentos algébricos de rotina;
- estabelecer conexões com a Geometria e os Números e Operações contribui para evitar a abordagem à Álgebra apenas como um conjunto de regras e procedimentos a memorizar. (pp. 55-56)

Vistas as orientações curriculares para o estudo da Álgebra no 3.º ciclo de escolaridade, segue-se para o encontro da teoria relativa à problemática definida – ensino e aprendizagem das equações do 2.º grau, no 8.º ano de escolaridade.

Arcavi (1994, 2006) considera os símbolos como sendo a ferramenta principal da Álgebra e, ter sentido do símbolo é atribuir significado a esses símbolos. Com isto o autor permite que os alunos sejam capazes de decidir quando os símbolos são úteis e por sua vez, quando devem ser utilizados, nomeadamente, para evidenciar relações, mostrar a generalidade e/ou fazer conjeturas.

Este autor enumera alguns comportamentos do individuo que mostram a existência do sentido do símbolo, de forma a, elucidar o significado de sentido de símbolo:

- Compreensão sobre o poder dos símbolos, tendo-os presentes e disponíveis;
- Percepção de quando os símbolos não devem ser considerados seja em detrimento de uma representação mais adequada à situação envolvida, seja para encontrar uma solução mais elegante ao problema proposto;
- Ter a capacidade de selecionar uma representação simbólica para um problema;

- Ir mais além da manipulação algébrica, completando-a com a leitura dos significados das representações simbólicas envolvidas na resolução de um problema;
- Ter consciência de que informações gráficas ou verbais podem ser expressas algebricamente, assim como, ter a capacidade de construir a expressão algébrica tendo em conta as condições apresentadas;
- Entender a constante necessidade de procurar significados nos símbolos e nas operações algébricas na resolução de um problema;
- Compreender que os símbolos podem desempenhar diferentes papéis em função do contexto e construir uma ideia dessas diferenças.

Para Schoenfeld (1992), “as ferramentas da Matemática são a abstração, a representação simbólica e a manipulação simbólica” (p. 3). Este autor, também, reforça a ideia de que aprender e pensar matematicamente não consiste no treino de utilização dessas ferramentas, mas sim na aplicação de processos de matematização e abstração, assim como, na utilização dessas ferramentas para a compreensão, de modo a, dar sentido à Matemática. Este “dar sentido a” vai de encontro a um dos aspetos da teoria da objetivação, desenvolvida por Radford (2006), que contempla a interação social como parte consubstancial da aprendizagem, ou seja, uma fonte importante para “dotar de sentido os objetos conceptuais que o aluno encontra na sua cultura” (p. 113).

Por sua vez, Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009), referido e adaptado em Grossmann e Ponte (2011), apresentam um quadro de referência (Quadro 2.2) para analisar o sentido de símbolo tendo em consideração quatro categorias: expressões algébricas, equações, problemas e funções. Segundo o quadro e analisando as subcategorias, na categoria das *expressões algébricas*:

- *Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado* – O sentido de símbolo pressupõe um conhecimento dos símbolos algébricos e da forma como estes são utilizados, ou seja, identificar, combinar e utilizar, dentro de um contexto adequado, estes símbolos no trabalho com expressões algébricas. Por exemplo, o sinal de “=” é um símbolo com uma enorme diversidade de significados.

- *Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente* – O ser capaz de explicitar através dos símbolos informação expressa noutra linguagem, nomeadamente, na linguagem comum.
- *Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstrata* – Algumas características e propriedades são mais visíveis e intuitivas quando se trabalha com números, mas é importante recorrer ao uso das letras e às suas diversas interpretações. Esta passagem do concreto para o abstrato, ao ser feita com compreensão das propriedades específicas da linguagem algébrica, demonstra um sentido de símbolo forte.
- *Criar uma expressão simbólica para um determinado objetivo* – A sensibilidade para a escolha adequada dos símbolos, de modo a, escrever uma expressão simbólica para resolver uma questão ou exprimir com clareza uma certa condição, que permita atingir o objetivo proposto.

Expressões Algébricas	▪ Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado; ▪ Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente; ▪ Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstrata (sentido do número para sentido de símbolo); ▪ Criar uma expressão simbólica para um determinado objeto.
Equações	▪ Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos; ▪ Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados; ▪ Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado; ▪ Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais; ▪ Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar.
Problemas	▪ Decidir se é útil recorrer ao símbolo; ▪ Criar uma expressão simbólica que traduz a situação; ▪ Interpretar o símbolo no contexto do problema; ▪ Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas; ▪ Generalizar.
Funções	▪ Utilizar o símbolo para estabelecer relações quantitativas; ▪ Escolher a representação simbólica adequada; ▪ Analisar o efeito da mudança e da variável dos símbolos; ▪ Utilizar o símbolo para modelar situações; ▪ Compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes; ▪ Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões; ▪ Compreender e utilizar representações do mesmo objeto matemático.

Quadro 2.2 – Quadro de referência do sentido de símbolo (Adaptado de Grossmann & Ponte, 2011).

Passando à segunda categoria – *Equações*:

- *Sentir o problema a partir da inspeção dos símbolos* – Uma análise inicial sobre os símbolos envolvidos e a capacidade de prever resultados, revelam a existência de um sentido de símbolo forte, permitindo assim, uma maior eficácia no trabalho algébrico.
- *Manipulação simbolicamente utilizando os procedimentos adequados* – Ter sentido de símbolo é por vezes evidenciado pela aplicação dos procedimentos da resolução de equações, que permite uma transformação e simplificação de objetos algébricos.
- *Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado* – O sentido de símbolo associa a manipulação simbólica à compreensão do que se está a trabalhar, e a habilidade de ver para lá dos detalhes da manipulação, verificando persistentemente se o trabalho realizado está a conduzir ao objetivo ambicionado.
- *Identificar equações equivalentes procurando novos aspetos dos significados originais* – Um sentido de símbolo desenvolvido pressupõe uma validação das equivalências que vão emergindo ao longo do processo da manipulação algébrica e ao evidenciar uma capacidade para observar outros significados mais ricos que delas possam surgir.
- *Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar* – O mesmo símbolo pode ter diferentes interpretações consoante o contexto onde está inserido. O modo como o símbolo é interpretado é determinante no desenrolar do trabalho algébrico.

Na categoria dos *problemas*, segundo o quadro apresentado por Grossmann & Ponte (2011):

- *Decidir se é útil recorrer ao símbolo* – A resolução de um problema pode, ou não, incluir o recurso ao símbolo. Ter sentido de símbolo é ser capaz de decidir se a sua utilização contribui ou não para a resolução do problema.
- *Criar uma expressão simbólica que traduza a situação* – Ter sentido de símbolo é por vezes evidenciado pela criatividade para combinar símbolos e criar frases simbólicas que contenham em si o problema, pois um problema não carece apenas a tradução de uma linguagem para outra.

- *Utilizar os símbolo no contexto do problema* – Compreender o papel do símbolo num problema é uma vertente essencial do sentido de símbolo.
- *Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjeturas* – O sentido de símbolo é o recorrer ao símbolo para confirmar, ou não, o que a intuição prevê.
- *Generalizar* – Recorrer ao símbolo e à sua capacidade de representar qualquer valor, significa que estamos perante um sentido de símbolo apurado.

Passando à última categoria, o sentido de símbolo também surgir no estudo das *funções*:

- *Utilizar o símbolo para estabelecer relações quantitativas* – Ter sentido de símbolo é perceber como as relações funcionam e compreender com clareza conceitos.
- *Escolher a representação simbólica adequada* – O termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado, ou seja, selecionar a melhor representação simbólica de uma função para estudar uma determinada situação, tendo em conta o objetivo pretendido.
- *Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos* – A indicação de sentido do símbolo visa compreender a variação de uma determinada expressão simbólica, quando se altera um dos seus parâmetros ou uma das suas variáveis, tendo em conta a forma como o símbolo está inserido na expressão e como a sua variação afeta a própria função. "A compreensão da variação é essencial à compreensão das funções e à compreensão de muitas ideias transmitidas nas notícias" (NCTM, 2007, p. 42).
- *Utilizar o símbolo para modelar situações* – O simples facto de olhar para uma função como uma representação da realidade, podendo com esta analisar o presente, prever resultados futuros ou inferir sobre acontecimentos passados, significa que existe um sentido de símbolo forte.
- *Compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes* – Sentido de símbolo é também estabelecer a relação entre os símbolos e o seu papel, em determinado contexto.
- *Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões* – Ter sentido de símbolo é ser capaz de interpretar os símbolos, reconhecendo o seu poder

na aprovação ou rejeição de uma conjetura. "Só com a utilização dos símbolos se pode aceitar ou rejeitar de forma conclusiva uma conjetura ou um argumento" (Arcavi, 1994, p. 25).

- *Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objeto matemático* – Flexibilidade na movimentação entre as diferentes representações, assim como, compreender cada uma delas é ter sentido de símbolo. Segundo o *Programa de Matemática do Ensino Básico*, "os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas, e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentado" (Ponte et al., 2007, p. 9).

O sentido de símbolo apurado, segundo Arcavi (1994), "pode-se manifestar na riqueza de recursos e de senso comum que podem ajudar os alunos a reconhecer erros e a começar a clarificar confusões" (p. 31). Defende também, que o simbolismo algébrico deve ser introduzido desde cedo em determinadas situações, para que os alunos consigam apreciar o seu poder na expressão, generalização e justificação de fenómenos aritméticos.

Os autores Castro e Castro (1997) referem que muitas das dificuldades por parte dos alunos na disciplina de Matemática devem-se a um destaque prematuro no simbolismo sem ter em consideração a real compreensão do seu significado matemático. Assim sendo, é necessário estabelecer conexões entre o símbolo e o seu próprio significado.

De modo a ultrapassar estas dificuldades, o NTCM (2007) sugere a introdução desde cedo das diversas utilizações dos símbolos literais, nomeadamente como incógnita, número generalizado e variável. Arcavi (1994) aconselha, a que os alunos criem uma intuição que lhes permita interpretar aspetos implícitos nos símbolos e prever o que pode surgir das ações que surgem sobre eles. E segundo a brochura da Álgebra (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 76), "ao longo do ensino básico, as atividades realizadas pelos alunos devem contribuir para que eles desenvolvam o sentido de símbolo. Continuando a valorizar o simbolismo, mas promovendo a sua apropriação em contextos de trabalho significativos, quer de cunho matemático, quer relativo a situações extra matemáticas, a aprendizagem da Álgebra requer a compreensão dos seus conceitos fundamentais".

2.2 Equações do 2.º grau

O atual *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007) apresenta novidades, relativamente, ao tema da Álgebra. Pois, no anterior programa (ME, 1991), a Álgebra não surgia em destaque, como um dos grandes tema, mas integrada quer no tema "números e cálculo", quer no tema "funções e estatística". E como consequência, desta mudança, o estudo das equações tem sido considerado um tema forte na Álgebra escolar. A sua aprendizagem é "o início de uma nova etapa no seu estudo da Matemática [...] sendo neste ponto que se decide em grande medida quais as suas [alunos] possibilidades de sucesso futuro na aprendizagem escolar desta disciplina" (Ponte, 2004, p.1).

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009) não é fácil definir "equação" de um modo correto e apropriado para os alunos do ensino básico, mas é necessário que estes desenvolvam uma boa ideia do que é uma equação. No 1.º ciclo, ao escrever expressões, como por exemplo: $8 = \_\_ + 5$ ou $1 + \_\_ = 6$, o professor pode referir-se a elas, dizendo que se trata de equações, e até mesmo poderá dizer que uma equação é uma igualdade como a dos exemplos, onde existe um valor desconhecido. Desta forma, os alunos vão se apropriando destes termos podendo até utiliza-los por iniciativa própria.

O *Programa de Matemática* (Ponte et al., 2007) incentiva os alunos do 2.º ciclo a utilizarem linguagem simbólica. Neste ciclo, segundo a brochura da Álgebra (Ponte, Branco & Matos, 2009), não é necessários que os alunos aprendam a resolver equações complexas, pelo que os exemplos a trabalhar devem envolver somente uma operação:

i) $13 + \_\_ = 20$; ii) $20 = 27 - \_\_$; iii) $\_\_ \times 3 = 18$; iv) $9 = \frac{27}{\_\_}$;

(Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 93)

A resolução de equações, deste tipo, tem como finalidade proporcionar aos alunos a atribuição de significado das operações que nelas surgem, assim como, a respetiva operação inversa. No entanto, é provável que numa primeira fase os alunos não consigam resolver as equações com esse tipo de raciocínio, podendo, nesta fase, recorrer a estratégias mais informais como a *contagem* ou a *tentativa e erro* (Kieran, 1992) – estes métodos para resolver equações serão apresentados mais à frente. Como referem Ponte, Branco e Matos (2009, p. 93), "A certa altura as expressões deste tipo passarão a ser escritas preferencialmente usando letras para designar a incógnita, termo que pode aparecer de forma natural no trabalho na sala de aula". Caso não surja naturalmente, o professor terá de decidir qual o melhor momento para introduzir a linguagem algébrica.

Para os alunos do 3.º ciclo, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), o conceito de equação pode ser de novo abordado tendo como base a análise de exemplos de equações: "Uma equação é uma expressão como $x + 5 = 9$, $2x + 4 = -3$, ou $-\frac{3}{2}x + 0{,}5 = \frac{x+1}{4}$ " (p. 93). Neste ciclo, os alunos, devem perceber que "uma equação envolve uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos" (p. 93) e por sua vez terão de ser alertados de que nem todas as expressões que envolvem o sinal de "=" são equações. Por exemplo, $4 + 5 = 9$ não é uma equação, porque nela não existe um valor desconhecido.

Estes autores acrescentam, ainda, que por vezes o conceito de equação é apresentado num sentido mais restrito – "uma equação é uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos e que só é satisfeita para certos valores da incógnita" (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 94). Mas o que acontece é que esta condição não inclui as identidades (como $x = x$) e as equações impossíveis (como $1 + x = x$) e a "verdade é que, muitas vezes, ao olharmos para uma expressão com o sinal de igual não sabemos se se trata de uma identidade, uma equação possível ou uma equação impossível, razão pela qual é preferível usar a noção abrangente de equação, que inclui como caso particular as identidades" (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 94).

A compreensão do conceito de equação, por parte dos alunos, envolve a compreensão de vários aspetos tais como o sinal de igual e de número desconhecido. Linchevski (1995) é da opinião que é necessário realizar um trabalho pré-algébrico relativo ao tema equações, de modo a, abranger as seguintes áreas:

- Desenvolver a noção de solução através de oportunidades para realizar a substituição de números por letras;
- Lidar com equações equivalentes através da substituição;
- Construir esquemas cognitivos através de atividades reflexivas que permitam que os alunos usem os seus procedimentos espontâneos próprios;
- Praticar a formulação de equações como uma atividade complementar para a resolução de equações.

Assim, o contato com equações fica um pouco mais facilitado com este tipo de trabalho, dando a possibilidade aos alunos de fazerem as suas próprias experiencias e partilhar e discutir os resultados uns dos outros. Estas ações facilitam o processo de compreensão das regras práticas de resolução de equações, assim como, facilita a proximidade dos alunos com os conceitos de solução de uma equação e de equações equivalentes.

Por sua vez, o estudo das equações do 2.º grau representa, para os alunos, um novo momento de aprendizagem algébrica, porque remete-os para um nível de abstração superior ao exigido na resolução de equações lineares, e por sua vez, contribui para o desenvolvimento do conceito de variável e noção de equilíbrio presente no sinal de "="; possibilita o estabelecimento de conexões com os diversos temas; permite a conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica; proporciona o recurso a diferentes formas de representação (algébricos e/ou geométricos); e constitui uma ferramenta fundamental na resolução de problemas.

O desenvolvimento do conceito de variável passa pelas diversas interpretações das letras, usadas no ensino da Álgebra, que muitas das vezes causam algum desconforto aos alunos. Segundo Küchemann (1981), existem seis níveis de interpretação para as letras usadas em Álgebra:

- *Letra avaliada*, é atribuído um valor à letra desde o princípio. Por exemplo, se $a = 3$, qual é o valor da expressão $a + 5$?
- *Letra não considerada*, a letra é ignorada ou a sua existência é reconhecida sem que lhe seja dado um significado. Por exemplo, se $x + y = 10$, $x + y + 5 =$...?

- *Letra como objeto*, a letra é entendida como o nome de um objeto concreto. Por exemplo, o cálculo do perímetro de um quadrado é $4l$, onde l é o comprimento do lado do quadrado.
- *Letra como incógnita*, a letra é entendida como um número específico mas desconhecido, com o qual é possível operar diretamente. Esta interpretação está intimamente relacionada com a resolução de equações como $2x + 1 = 7$, por exemplo.
- *Letra como número generalizado*, situação em que o aluno a vê como representante de vários números ou, pelo menos, como podendo ser substituída por mais do que um valor. Por exemplo, a expressão dos números ímpares, $2n - 1$.
- *Letra como variável*, caso em que esta é vista como representante de um conjunto de valores e pode ser usada para descrever relações entre dois conjuntos. Por exemplo, qual é maior, $2n$ ou n^2.

A noção de equilíbrio presente no sinal de "=" é muito importante para a compreensão do conceito de equação. Alguns alunos não olham para o sinal de igualdade de equações como um símbolo de equivalência entre o lado esquerdo e o lado direito da equação, mas sim como um sinal indicador do começar de um cálculo. Isto acontece, porque os alunos estão habituados a interpretar o símbolo "=" como indicador de uma operação, por exemplo, 5+3=. Segundo o *Programa de Matemática* (Ponte et al., 2007), é fundamental que os alunos se apropriem da mudança que este símbolo traz ao estudo das equações, de forma a, tentar colmatar as dificuldades e os erros nas resoluções de equações. Kieran (1981) defende que ao apresentar o sinal de "=" aos alunos – desde o início do estudo da álgebra – como um símbolo de "equivalência" entre igualdades aritméticas pode atenuar algumas dessas dificuldades.

Kieran (2007) refere, também, que uma dificuldade típica dos alunos em Álgebra é o facto de escrever a equação que traduz o problema, ou seja, a passagem de linguagem natural para algébrica. Esta dificuldade foi referida no estudo realizado por Nabais (2010), no entanto, esta autora acrescenta que se ultrapassada a fase da tradução do enunciado do problema, nomeadamente, a falta de vocabulário em geral, a ausência de significados para os conceitos envolvidos e a ausência de rigor na própria escrita simbólica, estas dificuldades estendem-se também, por vezes, à manipulação simbólica.

No estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano, realizado por esta autora, conclui-se que antes da aprendizagem da fórmula resolvente, a resolução correta de um problema dependia do tipo de equação do 2.º grau que o traduzia e, por sua vez, as dificuldades que surgiam estavam subjacentes à resolução dessa equação, acrescentando, ainda, que

> a fórmula resolvente, abarcando a resolução de todo o tipo de equações quadráticas, vem abrir novos caminhos à resolução de problemas, uma vez que os alunos não ficam dependentes do conhecimento dos diversos métodos de resolução, nem sequem da aplicação do método mais adequado, visto que, por norma, os problemas não obrigam a concretização desta última condição. Assim, após a aprendizagem da fórmula resolvente [que será no próximo ano] verifica-se uma ligeira melhoria neste domínio, salvaguardando as situações erróneas (…) na aplicação daquela fórmula. (Nabais, 2010, p. 267)

No entanto, após os alunos terminarem a resolução de um problema, que envolva equações do 2.º grau, é necessário olhar criticamente para as suas soluções e saber interpreta-las. Para Nabais (2010), alguns dos seus alunos revelaram “ausência de capacidade de interpretar e criticar as soluções de uma equação quadrática, no contexto de um problema” (p. 268). Alguns destes alunos ignoraram a existência de duas soluções simétricas para a equação $x^2 = k$ (com $k > 0$), e consideraram apenas a solução positiva.

Também, o processo de factorização traz dificuldades, aos alunos, uma vez que, envolve manipulação algébrica subtil (Lima & Tall, 2010). Relativamente a este processo, segundo Nabais (2010), as dificuldades na sua utilização indicam ausência de significado para o conceito de factor e estão interligadas com os seguintes raciocínios erróneos:

> (i) a factorização de polinómios simples, apontando para a existência de lacunas ao nível da apropriação de significado da propriedade distributiva e do entendimento do sinal de “=” como símbolo de equivalência;
> (ii) a utilização da lei do anulamento do produto, que é aplicada a equações em que o primeiro membro não se encontra factorizado, como a equações em que o 2.º membro é diferente de zero. (Nabais, 2010, p. 263)

Assim como, o método de completar o quadrado, também, para Kieran (2007), exige algumas manobras no cálculo e um bom domínio dos casos notáveis da multiplicação, o que por vezes, é uma das dificuldades dos alunos.

2.2.1 Estratégias na resolução de equações do 2.º grau

Nas equações e segundo Kieran (1992) só é exequível a sua interpretação estrutural adequada se existir necessariamente uma compreensão do carácter simétrico e transitivo da igualdade, de modo a, haver compreensão da igualdade que separa as duas expressões algébricas. Esta autora apresenta algumas estratégias de resolução de equações do 1.º grau – onde os três primeiros são considerados mais informais, contrariamente aos dois últimos que requerem um maior grau de formalização – classificando-os do seguinte modo:

- *Uso de factos numéricos*, para resolver a equação $5 + x = 8$, usa-se o facto de 5 mais 3 ser igual a 8.
- *Uso de técnicas de contagem*, considerando a equação anterior, e partindo do número 5, conta-se 6, 7, 8, logo, são contados 3 números inteiros depois de 5, até se obter o número 8.
- *Cobertura* (*cover-up*), para resolver a equação $2x + 9 = 5x$, 9 tem que ser equivalente a $3x$, já que $2x + 3x = 5x$. Assim, se $3x$ tem de ser 9, conclui-se que $x = 3$.
- *Desfazer* (*undoing*), para resolver a equação $2x + 4 = 18$, tratando-se de uma equação aritmética, efetuam-se todas as operações inversas pela ordem inversa, tendo em conta as operações que foram efetuadas relativamente a x. Assim, atendendo a que existe uma multiplicação por 2 seguida de uma adição de 4 unidades, começar-se-ia por subtrair 4 unidades a 18 e o resultado obtido seria dividido por 2.
- *Substituição por tentativa e erro*, substitui-se a incógnita por diversos valores, procurando o que torna a expressão uma proposição verdadeira. Por exemplo, para resolver a equação $2x + 5 = 13$, experimentam-se

diversos valores tais como, 2, 6 e depois 4, concluindo-se que só este último pode ser a solução da equação.

- *Transposição* (*muda de membro muda de sinal*), consiste em deslocar termos de um membro para o outro, utilizando a operação inversa da inicial.
- *Realização da mesma operação em ambos os membros*, implica a aplicação formal dos princípios de equivalência das equações, existindo a possibilidade de adicionar, subtrair, multiplicar e dividir ambos os membros por um mesmo número, que tem de ser diferente de zero, no caso da multiplicação e da divisão.

O estudo das equações de 2.º grau pode representar para os alunos uma nova oportunidade de aprendizagem algébrica, a qual remete para um nível de abstração superior ao exigido na resolução de equações lineares. Nabais (2010, p. 13) afirma que as equações de 2.º grau:

- Possibilitam a utilização e a exploração de múltiplas situações que contribuem para o desenvolvimento do conceito de variável;
- Apelam ao estabelecimento de conexões e à apropriação de conhecimentos de diversos temas;
- Favorecem a transição da linguagem natural para a linguagem matemática;
- Permitem o recurso a diferentes formas de representação, possibilitando a utilização de métodos algébricos e geométricos;
- Constituem uma ferramenta poderosa na resolução de problemas.

As equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita podem ser resolvidas, segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 152), por transformações algébricas simples e, a título exemplificativo, as estratégias que surgem adjacentes a este tipo de transformações:

i) $2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

ii) $2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$

iii) $2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x+2) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee x + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$

No primeiro exemplo, a equação $2x^2 - 3 = 0$ $(b = 0)$ pode ser resolvida isolando o termo do segundo grau, dividindo ambos os membros por dois e, de seguida, aplicando a noção de raiz quadrada a ambos os membros, no entanto, é necessário ter em atenção que esta equação tem duas raízes (simétricas entre si).

Por último, no caso da equação $2x^2 + 4x = 0$ $(c = 0)$, dois últimos exemplos, a estratégia de resolução aplicada baseia-se na sua escrita sobre a forma de produto de dois fatores igualando-os a zero, sendo depois necessário colocar um fator comum em evidência (x ou $2x$) e, por fim, aplicar a lei do anulamento do produto (o produto de dois números só pode ser zero se pelo menos um dos números for zero).

2.2.2 Erros e Dificuldades dos alunos na resolução de equações do 2.º grau

O conhecimento dos erros dados pelos alunos é muito importante dado que fornece informações ao professor relativamente aos significados por eles atribuídos, nomeadamente, as dificuldades de interpretação ou de manipulação simbólica. E sendo a Álgebra um dos grandes temas matemáticos, também é nela que existem algumas das maiores dificuldades dos alunos, aquando da transição da Aritmética para a Álgebra. Os autores Ponte, Branco e Matos (2009, p. 74-75) defendem que as principais dificuldades dos alunos nesta transição são:

- Ver a letra como representando um número ou um conjunto de números;
- Pensar numa variável como significando um número qualquer;
- Atribuir significado às letras existentes numa expressão;
- Dar sentido a uma expressão algébrica;
- Passar informação da linguagem natural para a algébrica;
- Compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos + e = e, em particular, distinguir adição aritmética (3 + 5) da adição algébrica (x + 3).

Segundo estes autores, grande parte das dificuldades dos alunos na resolução de equações advêm dos erros que são cometidos no trabalho com expressões algébricas, resultantes da não compreensão do seu significado ou das suas condições de equivalência. Para Booth (1984, citado em Matos & Ponte, 2008) a linguagem algébrica acarreta algumas dificuldades sentidas pelos alunos, dividindo-as em três áreas principais: (i) a interpretação das letras; (ii) a formalização dos métodos usados e (iii) a compreensão de notações e conversões.

Por sua vez, Pesquita (2007) aponta aspetos mais específicos para as dificuldades manifestadas pelos alunos que iniciam o estudo da Álgebra, tais como:

- Dificuldades em dar sentido a uma expressão algébrica;
- Não distinguir a adição aritmética (3 + 6) da adição algébrica (3 + x);
- Não ver a letra como a representação de um número;
- Atribuição de um significado concreto às letras;
- Dificuldades para pensar numa variável como significando um número qualquer;
- Interpretações diferentes para as ações que correspondem aos símbolos + e = na Aritmética e na Algébrica;
- Significados distintos para algumas letras na Aritmética (por exemplo, 2m em Aritmética significa 2 metros e em Álgebra é o dobro de m);
- Dificuldade em passar da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Mais uma vez estas dificuldades surgem do significado que os alunos dão aos símbolos, à exatidão proporcionada pelo número para as operações e ao uso das letras para indicarem valores. Portanto, a principal dificuldade que surge é a ideia de variável.

Alguns erros cometidos pelos alunos na resolução de equações do 2.º grau derivam, principalmente, dos erros cometidos na resolução de equações do 1.º grau e na simplificação de expressões algébricas. Alguns desses erros, para Kieran (1992), são:

- O *erro de transposição*, consiste na aplicação incorreta da regra mudar de membro então mudar de sinal. Os alunos ignoram a simetria de uma equação, não operando sobre a equação como um objetivo matemático. Por exemplo, na equação $5x + 2 = 0$ o erro de transposição pode levar à equação $5x = 2$;

- O *erro da adição incorreta de termos semelhantes*, como o próprio nome indica, os alunos adicionam incorretamente os coeficientes dos termos semelhantes de uma equação. Por exemplo, da equação $-5x + 8x = 9$ resulta a equação $-3x = 9$;
- O *erro eliminação de parêntesis*, resulta essencialmente da aplicação incorreta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica. Consideremos, por exemplo, a equação $5x\left(\frac{x}{2} - 1\right) = -6x$. Perante esta equação, os alunos após aplicarem a propriedade distributiva, obtêm a equação $\frac{5x}{2} - 5x = -6x$;
- O *erro eliminação incorreta de denominadores*, resulta do facto de eliminar os denominadores da equação sem antes reduzirem todos os termos da equação ao mesmo denominador. Por exemplo, da equação $5x\left(\frac{x}{2} - 1\right) = -6x$ resultaria a equação $5x(x - 2) = -6x$.

De um estudo realizado por Vaiyavutjamai, Ellerton e Clements (2005), a aproximadamente cinto centenas de estudantes de três países – Tailândia (9.º ano), Brunei Darussalam (10.º ano) e dos Estados Unidos (alunos do 2.º ano universitário do ramo educacional), com o objetivo de perceber como os alunos resolvem equações quadráticas elementares, do tipo $x^2 = k$ (com $k > 0$) e $(x - a)(x - b) = 0$, sendo a e b números reais. Todos estes alunos resolveram as mesmas equações e vários aspetos comuns resultaram da análise das suas respostas, nomeadamente:

- Muitos alunos não percebem que as equações quadráticas podem ter duas soluções;
- Alguns alunos que resolvem corretamente uma equação quadrática, não sabem verificar se os valores encontrados são soluções da equação e tendem a não saber o que representam as soluções em relação à equação inicial;
- A maioria dos alunos não percebe que se uma variável aparece duas vezes na mesma equação quadrática, então o seu valor é o mesmo, independentemente do lugar que ocupa na equação. Por exemplo, a equação $x^2 - 8x + 15 = 0$ ou a equação $(x - 3)(x - 5) = 0$;
- Ao resolverem a equação $(x - 3)(x - 5) = 0$, alguns alunos tailandeses, desembaraçavam de parênteses, obtendo $x^2 - 8x + 15 = 0$. Seguidamente voltavam a factorizar, e só depois igualavam cada factor a zero (p. 2).

Um erro que também ocorre com frequência nas resoluções dos alunos consiste na adição incorreta de dois termos semelhantes, ignorando os sinais que procedem esses termos, dando origem a situações do tipo $-2x + 3x = 8 \Leftrightarrow -5x = 8$ (Kieran, 2006).

Segundo um estudo realizado por Lima e Tall (2010) os alunos revelam falta de flexibilidade na manipulação simbólica e fraca compreensão das estratégias utilizadas para resolver equações, tornando-se visível uma espécie de *personificação processual* no uso dos princípios de equivalência, intrinsecamente ligados ao uso de regras, como por exemplo, "muda de lado, muda de sinal", "muda de lado e coloca-se em baixo" ou ainda a "potência dois passa para o outro lado como raiz quadrada". Algumas vezes, esta estratégia leva a resultados corretos, no entanto, torna-se frágil se não estiver relacionada com o significado conceptual adequado, dando origem a resoluções totalmente erradas. Estes autores (Lima & Tall, 2010, p. 2) apresentam três exemplos de resoluções erradas da equação $2x = 4$:

i) $x = 4 - 2$; ii) $x = \frac{4}{-2}$; iii) $x = \frac{2}{4}$;

Os autores referem, ainda, que este aspeto leva a que diversos alunos considerem apenas a solução positiva da equação $x^2 = 9$, resolvendo-a como sendo equivalente a $x = \sqrt{9}$, também, de acordo com Nabais (2010), os alunos podem

> aplicar cegamente regras de manipulação ou procedimentos que julgam ter compreendido, a ocorrência de raciocínios erróneos revela ausência de compreensão do significado matemático de equação. Cabe ao professor identificar situações em tal acontece, e procurar estratégias de ensino que favoreçam o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa para os alunos e uma melhoria das suas práticas de ensino. (p. 60)

2.3 Tarefas matemáticas

As tarefas que os alunos realizam na sala de aula, podem ser de muitos tipos, umas mais desafiantes outras mais acessíveis, umas mais abertas outras mais fechadas, umas referentes a contextos reais outras formuladas em termos puramente matemáticos. Existem muitos tipos de tarefas matemáticas, tais como, os problemas, os exercícios, as investigações e as explorações (Ponte, 2005b).

As tarefas matemáticas, segundo Ponte (2005b), assumem duas dimensões de destaque: (1) o grau de desafio matemático, que está relacionado com a percepção da dificuldade da tarefa, fazendo-se variar entre o "reduzido" e o "elevado" grau de dificuldade e, (2) o grau de estrutura, que varia entre "aberto" e "fechado" (ver figura 2.2). Este autor considera que uma tarefa fechada é "aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas" (Ponte, 2005b, p.18).

Figura 2.1 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e abertura (Ponte, 2005b).

Ao analisar a figura anterior, facilmente verificamos a diferença entre as tarefas de exploração e as tarefas de investigação, que está, portanto, no grau de desafio. Para Ponte (2005b), caso o aluno consiga trabalhar desde logo, sem muito planeamento, então estamos perante uma tarefa de exploração, caso contrário, estamos perante uma tarefa de investigação.

A escolha de tarefas a propor e o modo como as articulam assume um papel de destaque no trabalho do professor. É extremamente necessário que o professor consiga envolver os alunos em tarefas de carácter exploratório e investigativo, de modo a, contribuir para o desenvolvimento das capacidades relacionadas com o pensamento algébrico (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999; NCTM, 2007). Vale e Pimentel (2005) aludem que:

> a integração deste tipo de atividades no currículo da Matemática escolar é uma das vias para que todos os estudantes descubram conexões entre vários tópicos, desenvolvam a sua capacidade de comunicar matematicamente e aumentem o seu desempenho na resolução de problemas. (p. 19)

Uma tarefa matemática pode ser trabalhada das mais diversas formas na sala de aula. O *Programa de Matemática* (Ponte et al., 2007) defende relativamente à aprendizagem geral da Matemática:

> O trabalho individual é importante, tanto na sala de aula como fora dela. O aluno deve procurar ler, interpretar e resolver tarefas matemáticas sozinho, bem como ler, interpretar e redigir textos matemáticos […] [trabalho a pares] é um modo de organização particularmente adequado na resolução de pequenas tarefas, permitindo que os alunos troquem impressões entre si, esclareçam dúvidas e partilhem informações. A organização em grupo é especialmente adequada no desenvolvimento de pequenos projetos que possibilitam uma divisão de tarefas pelos alunos […] também pode ser muito produtivo na resolução de um problema ou na realização de uma investigação matemática. Finalmente, o trabalho coletivo em turma é muito importante para proporcionar momentos de partilha e discussão bem como para sistematização e institucionalização de conhecimentos e ideias matemáticas, devendo o professor criar condições para uma efetiva participação da generalidade dos alunos nestes momentos de trabalho. (p. 10)

Espera-se que a escola permita desenvolver, em todos os alunos, as capacidades para usarem eficazmente a matemática ao longo das suas vidas, lhes suscite o gosto pela aprendizagem permanente e lhes crie iguais oportunidades de aprender e de se tornarem cidadãos capazes de ultrapassar as barreiras da vida, ou seja, se durante a vida escolar lhes forem dadas oportunidades de se envolverem com diferentes problemas, quando adulto procederam com inteligência e naturalidade ao terem que enfrentar certos problemas/obstáculos da vida diária, sejam eles de ordem econômica, política, social, entre outros (NCTM, 2007).

A resolução deste tipo de tarefas no ensino da Matemática tem vindo, assim, a assumir um lugar de destaque em todos os níveis de ensino. Promove a motivação dos alunos na aprendizagem, possibilita a criação de pensamento crítico e criativo nos alunos e possibilita a participação e decisão dos alunos sobre o seu processo de aprendizagem. Salienta-se igualmente a ideia de que resolver problemas matemáticos pode ser comparado a vencer um jogo. Para ambos (professor e aluno) é necessário entender o objetivo, conhecer as regras e saber selecionar as estratégias que devem ser tomadas.

A resolução de tarefas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática (Ponte, Branco & Matos, 2009), facilitando assim, a aprendizagem e progresso no desenvolvimento lógico e criativo dos alunos, no sentido em que existem várias estratégias de resolução. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007) abriga que "a resolução de problemas não só é um importante objetivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma atividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos" (p. 8), assim como, "os alunos devem ser capazes de resolver problemas" (p. 5) e que esta experiência constitui

> Uma atividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático. Neste processo, os alunos devem compreender que um problema matemático, frequentemente, pode ser resolvido através de diferentes estratégias e dar atenção à análise retrospetiva da sua resolução e apreciação das soluções que obtêm. (p. 6)

Segundo as indicações metodologias do *Programa de Matemática* (Ponte et al., 2007), a resolução de problemas "é uma capacidade que se articula com as outras capacidades matemáticas e deve ser trabalhada em todo os temas matemáticos, conferindo coerência à aprendizagem matemática" (p. 45), de tal forma que a resolução de problemas associa-se quer aos objetivos de ensino da Matemática quer aos contextos de aprendizagem.

Os problemas fundem-se com o desenvolvimento e com a aprendizagem da Matemática, sendo por vezes considerados "a força motriz da Matemática" (Stewart, 1995, p. 17), uma vez que têm sido como que uma alavanca de motivação para os matemáticos e, também, um incitador do desenvolvimento da Matemática como ciência. A resolução de problemas no ensino da Matemática é preponderante para a educação, pois oferece ao aluno a curiosidade, ao mesmo tempo em que traz situações reais para a sala de aula e proporciona a possibilidade da descoberta do novo, motivando-o para o desenvolvimento do modo de pensar Matemática, além de ampliar o seu conhecimento matemático.

O exercício sustenta-se num procedimento padrão, onde o aluno tem um certo domínio para a obtenção do resultado ou tem memorizado o mecanismo resolutivo. E o problema envolve o aluno com uma situação imprevisível, coloca-o diante de um obstáculo a ser superado com maior ou menor complexidade. Ou seja, o exercício envolve aplicação de resultados teóricos enquanto o problema necessariamente envolve invenção e/ou criação significativa (Ponte, 2005b).

Na aprendizagem da Matemática a resolução de problemas como método de ensino é fundamental, pois coloca o aluno diante de questões possibilitando o exercício e o desenvolvimento do raciocínio interpretativo do aluno, ajuda-o a pensar por si próprio e não apenas reproduzir conhecimentos já lecionados, transformando a antipatia que várias pessoas têm à disciplina em algo prazeroso, proveitoso e produtivo. Com isso, pretendo ressaltar a importância da investigação de novas alternativas de transmissão de conhecimentos e a motivação na aprendizagem dos alunos, de modo a obter a satisfação deles em aprender Matemática.

A resolução de problemas tem como objetivos: fazer o aluno pensar produtivamente; desenvolver o raciocínio do aluno; preparar o aluno para enfrentar situações novas; dar oportunidade aos alunos de se envolverem com aplicações matemáticas; tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras; promover no aluno estratégias e procedimentos para a análise e solução de situações onde se procura um ou mais elementos desconhecidos (Pólya, 1975). Este autor considera, ainda, a resolução de problemas uma atividade privilegiada para estimular o gosto pela descoberta, levando os alunos a sentirem-se desafiados nas suas capacidades matemáticas, levando a um aumento do seu gosto por esta disciplina.

George Pólya (1975, 2003) foi o grande inovador em relação às ideias de resolução de problemas, organizando as etapas do procedimento de resolução e dividindo-as em quatro: compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, análise retrospetiva da estratégia e a execução da estratégia que contém a revisão da solução. Estas quatro etapas podem ajudar o aluno a organizar o seu processo de resolução de um dado problema. Ao longo destas etapas o aluno deverá colocar a si próprio uma série de questões que têm como objetivo organizar e estruturar o seu pensamento de uma forma mais eficaz e sistemática.

Para que o aluno resolva bem um problema, deve ser preparado pelo professor para ter uma boa dose de “paciência”, para que com calma consiga compreender, fazer as devidas representações e aplicar as suas próprias estratégias. Só assim, o trabalho terá um maior aproveitamento e o próprio aluno será capaz de verificar o resultado que obteve e, por consequente o seu progresso. As orientações publicadas pelo NCTM em 1991 vêm reforçar esta linha de pensamento:

> A resolução de problemas deve ser o foco central do currículo de Matemática. A resolução de problemas não é um tópico distinto, mas um processo que atravessa todo o programa e fornece o contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas. (p. 29)

Os problemas de raciocínio algébrico podem ter múltiplas soluções, o que permite ao aluno explorar diferentes caminhos de resolução. E é nesta fase de exploração e discussão das estratégias usadas, que o professor tem um papel fundamental, pois cabe ao professor incentivar a exploração de variadas resoluções, de modo a, ajudar o aluno a desenvolver o pensamento algébrico. Segundo Arcavi (2006) ser professor de Matemática significa selecionar, implementar e garantir tarefas que maximizem o potencial da aprendizagem dos seus alunos.

Um dos aspetos fundamentos na aprendizagem da Álgebra diz respeito à tradução da linguagem natural para a algébrica. A ligação do conhecimento (prático) à Álgebra é realizada através de *word problems*. Neste ponto, Kieran (1992) subdivide-os em três tipos de problemas:

i) Problemas tradicionais;

ii) Problemas de abordagem funcional;

iii) Problemas de generalização, de resposta aberta.

Os *word problems* tradicionais referem-se à elaboração de uma equação que representa uma relação. Para este tipo de problema, a abordagem mais comum consiste em escrever uma equação envolvendo incógnitas e operações de acordo com algumas relações matemáticas; proceder a sua resolução isolando a incógnita, utilizando processos de manipulação algébrica; e por fim, determinar o seu valor.

Os *word problems de abordagem funcional* vão de encontro aos tradicionais *word problems*, distinguindo-se no seu modo de apresentação e abordagem de resolução. De um modo geral, antes da resolução do problema, são estabelecidas as relações entre duas variáveis neste tipo de problemas. A expressão que representa essa mesma relação funcional torna explícita a interpretação do problema.

Nos *word problems de generalização, de resposta aberta* a letra assume o papel de variável e é usada para expressar relações numéricas, como por exemplo, o problema: Mostra que a soma de dois números ímpares consecutivos é sempre um número par.

Também, Bednarz e Janvier (1996) mencionam a importância da resolução de problemas no desenvolvimento do pensamento algébrico, assim como, no ensino da Álgebra. Estas autoras verificam que os alunos utilizam, preferencialmente, estratégias Aritméticas na resolução de *word problems* e apresentam dificuldades em utilizar as equações para resolver problemas deste tipo. Para além disso, Van Ameron (2003) refere que apesar de alguns alunos conseguirem escrever equações para traduzir problemas, futuramente, não as utilizam para procurar as soluções desses problemas, preferindo utilizar um método mais informal.

Neste sentido, procurei proporcionar aos alunos tarefas que (i) desenvolvam a compreensão matemática; (ii) apelem ao raciocínio matemático e à resolução de problemas; (iii) estimulem os alunos a estabelecer conexões matemáticas; (iv) apelem à inteligência dos alunos; e (v) promovam a comunicação de raciocínios matemáticos. Desta forma, as tarefas propostas foram de encontro às orientações curriculares deste tema em estudo, assim como, valorizaram o desenvolvimento do pensamento algébrico, de modo a, oferecer aos alunos uma aprendizagem significativa da equação de 2.º grau a uma incógnita.

2.4 Representações matemáticas

As representações matemáticas destacam um papel importante nos documentos curriculares, nomeadamente, no NCTM (2000), onde refere que a aprendizagem destas representações deve fornecer aos alunos a "oportunidade para compreender o poder e a beleza da Matemática e equipa-los para usar representações nas suas vidas pessoais" (p. 364). Assim como Vergnaud (1998), também, é da opinião que se deve estudar as representações e justifica a sua opinião apontando as seguintes razões:

> A primeira é que todos experimentamos representações como imagens internas, gestos e palavras. A segunda é que as palavras e símbolos que usamos para comunicar uns com os outros não se referem diretamente à realidade mas a entidades representadas: objetos, propriedades, relações, processos, ações e constructos acerca das quais não existe acordo automático entre duas pessoas. (p. 167)

Outros autores que manifestam esta mesma opinião são Greeno e Hall (1997), que referem que as representações são "ferramentas essenciais para a comunicação e o raciocínio sobre conceitos e infirmações em Matemática, Ciência e outros domínios" (p. 362). Também, defendem que as diferentes representações não devem ser consideradas alternativas nem independentes entre si e sublinha a importância de se estabelecerem conexões entre os vários tipos de representações. Podendo constatá-lo no modelo apresentado por Clement (2004):

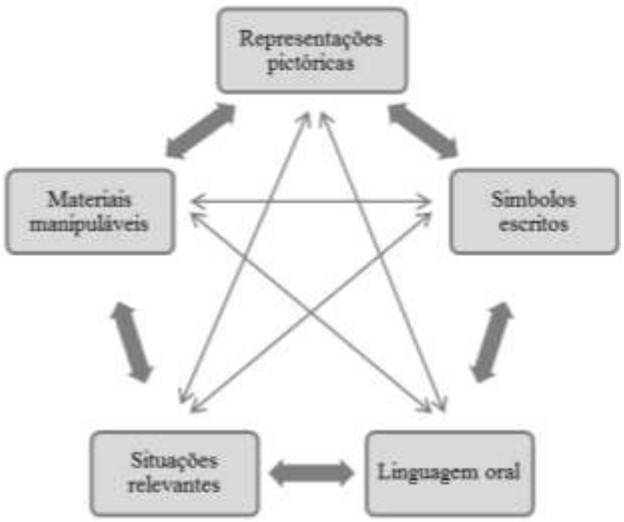


Figura 2.2 – Conexões entre representações (adaptada de Clement, 2004).

Segundo Duval (2006), uma representação de um objeto, tomando a palavra objeto em sentido lato, por forma a incluir entidades abstratas como as que encontramos em matemática, é algo que substitui esse objeto. E o acesso aos objetos matemáticos só se torna possível por intermedio de símbolos ou representações externas desses objetos.

As representações externas, para Goldin (2008), envolvem essencialmente símbolos escritos, como por exemplo: palavras escritas ou texto, algarismos, símbolos, equações algébricas, gráficos, diagramas, entre outros. A linguagem falada ou oral também é considerada por Goldin (2008) uma representação externa. Por sua vez, as representações internas são as de difícil acesso, ou seja, são aquelas que são utilizadas mentalmente, e caracterizam-se por uma grande especificidade individual. A linguagem pessoal, as imagens mentais, as formas de abordar a resolução de problemas e o interesse manifestado sobre um determinado tema são considerados exemplos de representações internas.

A passagem para a escrita algébrica descrita em um texto na linguagem natural é um exemplo de conversão, podendo-se assim dizer que a conversão consiste em mudar a forma pela qual um objeto é representado. Segundo Duval (2008), a conversão pode ser analisada sob duas perspetivas: do ponto de vista matemático, a conversão é utilizada para a escolha de uma determinada expressão algébrica na qual teríamos um procedimento de resolução de forma mais fácil, menos trabalhosa ou ainda, para obter uma segunda expressão algébrica que serve de suporte ou de guia para novos processos de resolução. Por exemplo, na resolução da equação $x^2 - 4x + 4 = 0$ que também, se pode ser representada por $(x - 2)(x - 2) = 0$, é possível resolver a primeira equação utilizando a fórmula de Bhaskara, já a segunda equação, cuja resolução se torna menos trabalhosa, basta verificar a condição: $x - 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$, para concluir que as raízes $x_1 = x_2 = 2$, o que nos leva à solução da equação de maneira menos trabalhosa.

Segundo o ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que se torna responsável pelos mecanismos que conduzem, os alunos, à compreensão dos conceitos dos objetos matemáticos. Ao contrário do anterior, o ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que aparece como atividade de transformação representacional fundamental, ou seja, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão no processo de ensino aprendizagem da Matemática.

Como refere Goldin (2002): “Para discutir as representações, devemos ser capazes de considerar pelo menos configurações de símbolos ou objetos externos ao aprendente individual ou resolvedor de problemas, configurações internas ao indivíduo e relações entre elas” (p. 198). Para este autor, as representações envolvem alteráveis externas que resultam da observação, em conjunto com outras – constructos internos – que requerem especial atenção, pois, normalmente, a sua inferência depende do contexto em questão.

Capítulo 3

Unidade de ensino sobre equações do 2.º grau

3.1 Caracterização da escola

A Escola Básica 2, 3 de Fernando Pessoa é uma das quatro escolas pertencentes ao Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa. Este agrupamento é um Território Educativo de Intervenção Prioritária (TEIP), contempla o pré-escolar; os três níveis de ensino básico; Cursos de Educação e Formação (CEF); Curso Básico de Música, em regime de ensino articulado da música, mediante protocolo com a Academia dos Amadores de Música; e uma Unidade de Apoio Especializado aos Alunos com Multideficiência (UAEM). A escola cooperante funciona como escola sede do agrupamento e inaugurou o seu funcionamento a 11 de Junho de 1973. Situa-se na Rua Cidade de Carmona, freguesia de Santa Maria dos Olivais, concelho de Lisboa, numa zona urbana bastante povoada.

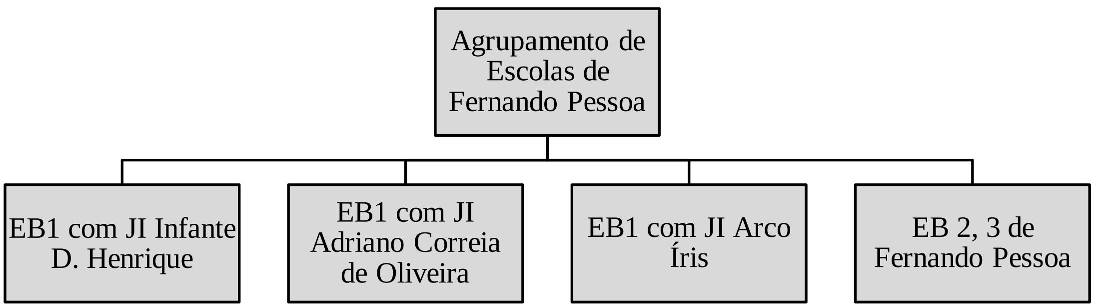


Figura 3.1 – Estabelecimentos do Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa.

A escola cooperante tem uma aparência acolhedora e é constituída por sete pavilhões: nos pavilhões 1, 2, 3 e 4 funcionam as salas de aula e cada um tem uma sala de professores; no pavilhão 5 está o bufete, a sala de professores e uma sala de aulas; no pavilhão 6 são as instalações gimnodesportivas. No pavilhão central, único com dois pisos, situa-se: o gabinete da direção, os serviços administrativos, a reprografia/papelaria, o centro de recursos educativos, o refeitório com cozinha, a sala de informática, a sala de reuniões, as salas de atendimentos aos encarregados de educação, a sala de diretores de turma, o gabinete de psicologia do Agrupamento, a sala polivalente e a sala dos assistentes operacionais.

Esta escola contém, também, zonas ajardinadas e de recreio. O formato íngreme do terreno e a disposição das instalações escolares provocam algumas dificuldades na comunicação e no convívio entre os elementos da comunidade escolar e sobretudo, na vigilância interna e externa do local (Projeto Educativo, 2012/2015).

Segundo o Projeto Educativo da Escola (2012/2015), neste ano letivo, o corpo docente era composto por 134 docentes – 8 destes docentes não se encontram em exercício efetivo de funções no Agrupamento – em que 1% tinha como habilitações literárias o bacharelato, 93% a licenciatura, 1% a pós-graduação e 5% o mestrado, e frequentavam a escola 29 turmas, sendo 14 do 2.º ciclo, onde uma dela faz parte do PIEF (Programa Integrado de Educação e Formação) e 15 do 3.º ciclo, onde duas dela fazem parte do PIEF, que englobavam cerca de 790 alunos. Os alunos provêm, maioritariamente, da classe média-baixa, existindo algumas situações de casos sociais problemáticos. Existem 77 alunos com necessidades educativas especiais ao abrigo do Decreto-Lei 3/2008 e 63 ao abrigo do GAAF (Gabinete de Apoio ao Aluno e à Família) a frequentar esta escola que tem como principal objetivo desenvolver práticas pedagógicas de inclusão educativa e social, assim como, promover a igualdade de oportunidades e a preparação de uma transição da escola para o emprego de crianças e jovens com necessidades educativas especiais.

3.2 Caracterização da turma

A turma sobre a qual o estudo incidiu é o 8.º 3.ª da Escola Básica 2, 3 de Fernando Pessoa, que se situa nos Olivais, Lisboa. Esta turma é composta por 13 raparigas e 14 rapazes, com idades compreendidas entre os 12 e os 14 anos, no início do ano letivo. Apenas um destes alunos está a repetir o 8.º ano pela segunda vez. Esta turma integra dois alunos com necessidades educativas especiais, abrangidos pelo Decreto-Lei 3/2008.

Fazendo uma caracterização geral da turma, esta tem um razoável desempenho na disciplina de matemática, sendo este facto comprovado pelas notas atribuídas no 1.º período, visto que numa escala de 1 a 5, houve dois níveis 4, doze níveis 3 e treze níveis 2, com uma grande tendência a serem melhorados no próximo período.

A figura 2 sintetiza os resultados escolares da turma na disciplina de Matemática no 1.º período.

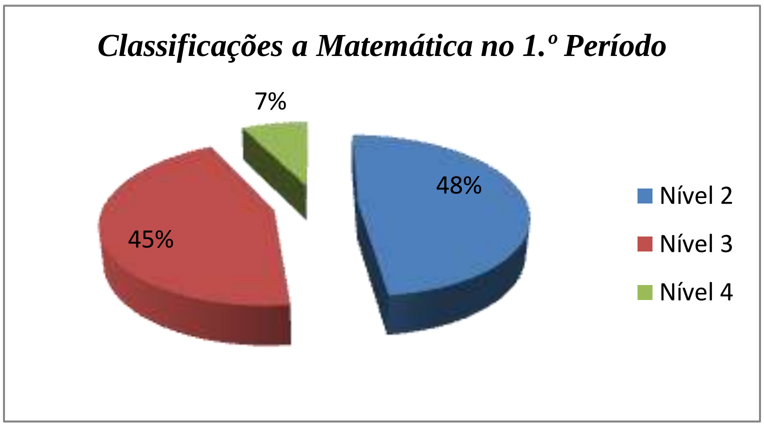


Figura 3.2 – Classificações a Matemática no 1.º Período.

Em relação à disciplina de Matemática, no decorrer do 2.º Período houve um teste intermédio implementado pela professora cooperante, por mim e pela minha colega de estágio, o qual representou o primeiro contato destes alunos com testes desta natureza, levando, no entanto, a uma subida em algumas notas, sendo este facto comprovado pelas notas atribuídas no 2.º período, visto que numa escala de 1 a 5, houve um nível 5, oito níveis 4, nove níveis 3 e nove níveis 2.

A figura 3 sintetiza os resultados escolares da turma na disciplina de Matemática no 2.º período.

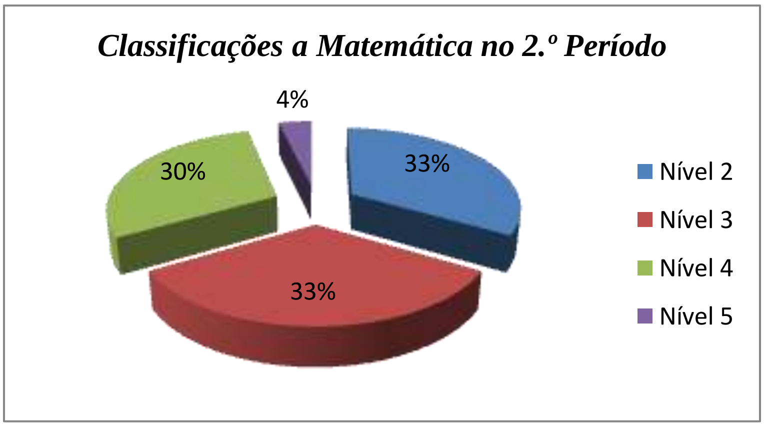


Figura 3.3 – Classificações a Matemática no 2.º Período.

No final do ano letivo os resultados da turma voltaram a melhorar, apesar de existir alunos com nível negativo. Na reunião final de ano, os professores da turma elogiaram o progresso dos alunos, tanto a nível escolar como humano, apesar de alguns alunos continuarem imaturos, no entanto, três alunos ficaram retidos no 8.º ano. As notas atribuídas no 3.º período, numa escala de 1 a 5, foram bastante satisfatórias, havendo um nível 5, dez níveis 4, oito níveis 3 e oito níveis 2 (Figura 3.4).

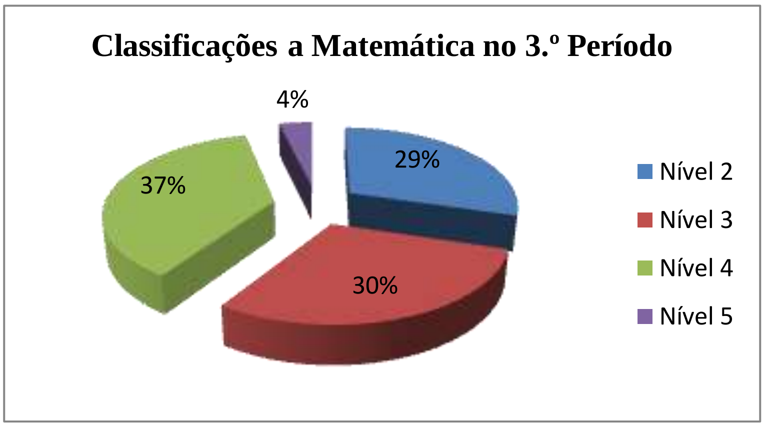


Figura 3.4 – Classificações a Matemática no 3.º Período.

Da observação direta das aulas de Matemática, esta turma é heterogénea a nível de aprendizagem, situação socioeconómica e afetiva. Quanto às expectativas de futuro, a grande maioria pretende tirar um curso superior. Tem uma postura participativa e crítica, principalmente nos momentos de discussão em grande grupo. Estes alunos estão habituados a trabalhar individualmente ou em díade, no entanto, estamos (eu e a professora) a proporcionar-lhes momentos de aula para realizarem trabalhos em grupos de quatro. No entanto, estes alunos são brincalhões, pouco autónomos e concentrados, e no que diz respeito ao seu comportamento este pode ser caracterizado como um comportamento irregular.

3.3 Ancoragem da unidade de ensino no programa

A preparação desta unidade de ensino e tarefas, para a realização deste estudo, orientou-se pelas recomendações oriundas de vários documentos nacionais e internacionais de referência para o ensino da Matemática nomeadamente, o programa de Matemática do 8.º ano, em vigor neste ano letivo (Ponte et al., 2007) e os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007). No âmbito desta unidade – "Sequencias e regularidades. Equações" – os alunos de 3.º ciclo alargam e aprofundam o estudo das relações, nomeadamente da proporcionalidade direta e a partir do estudo de sequências iniciado anteriormente, representa-se simbolicamente o termo geral. Também estudam as equações do 1.º e 2.º graus e sistemas de equações do 1.º grau, assim como, iniciam o estudo das funções associadas à modelação de situações da realidade (Ponte et al., 2007). Os alunos devem: ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos e ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos (Ponte et al., 2007).

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007) salienta a Álgebra como tema programático e o pensamento algébrico surge como um dos eixos fundamentais do ensino-aprendizagem a par do pensamento geométrico, do trabalho com números e operações e do trabalho com dados. A Álgebra é um dos quatro grandes temas matemáticos desenvolvidos ao longo dos três ciclos do ensino básico, sendo explicitamente referido no 2.º e 3.º ciclos.

A resolução de equações, no processo ensino e aprendizagem, com a utilização da incógnita inicia-se de forma informal no 6.º ano com equações simples só com uma operação. No 7.º ano exploram-se as equações de 1.º grau a uma incógnita e trabalham os princípios de equivalência. No 8.º ano são trabalhadas as equações do 2.º grau incompletas e este subtema é extremamente essencial, porque prepara a resolução de equações completas que serão abordadas no 9.º ano, com a introdução da forma resolvente.

Segundo o NCTM (2007), os alunos do 6.º ao 8.º ano deverão representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos, pois o trabalho envolvendo variáveis e equações constitui uma importante componente do currículo destes anos de escolaridade.

No que diz respeito ao 8.º ano de escolaridade o *Programa de Matemática* (Ponte et al., 2007) recomenda que se deve proporcionar aos alunos experiências informais, em situações simples, antes da resolução algébrica formal, pois são essas experiências que contribuem para a compreensão dos conceitos e para o fundamento dos procedimentos a seguir. A brochura da Álgebra (Ponte, Branco, & Matos, 2009) evidencia que o trabalho com equações "facilmente pode conduzir a uma mecanização de procedimentos por parte dos alunos, sem qualquer compreensão do que estão a fazer" (p. 148).

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007) enuncia, nos seus objetivos gerais, o que se espera da aprendizagem dos alunos, valorizando aspetos relacionados com "a representação, comunicação e raciocínio em Matemática, a resolução de problemas e as conexões matemáticas, e a compreensão e disposição para usar e apreciar a Matemática em contextos diversos" (p. 4). A resolução de problemas, neste documento, é identificada como uma atividade privilegiada para a ampliação, consolidação e aprofundamento do conhecimento matemático dos alunos e refere a importância de desenvolver as capacidades de

- compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas;
- apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam;
- monitorizar o seu trabalho e refletir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes;
- formular problemas. (p. 5)

O programa defende, ainda, que "o estabelecimento de conexões é essencial para uma aprendizagem da Matemática com compreensão e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar" (p. 6), ou seja, os alunos devem ser capazes de compreender que as ideias Matemática se interrelacionam, formando um todo. Por outro lado, este programa "destaca três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática: a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática" (p. 7).

Também, o NCTM (2007) salienta a importância do relacionamento dos vários tópicos matemáticos ao mencionar que "a noção de que as ideias matemáticas se encontrar interligadas deverá atravessar a experiência matemática escolar em todos os anos de escolaridade" pois "quando os alunos conseguem estabelecer conexões entre ideias matemáticas, a sua compreensão é mais profunda e duradoura" (p. 71).

A brochura da Álgebra (Ponte, Branco & Matos, 2009) evidencia que o trabalho com equações “facilmente pode conduzir a uma mecanização de procedimentos por parte dos alunos, sem qualquer compreensão do que estão a fazer” (p. 148). Para o evitar, o *Programa de Matemática* (Ponte et al., 2007) recomenda que se deve proporcionar aos alunos experiências informais, em situações simples, antes da resolução algébrica formal, pois são essas experiências que contribuem para a compreensão dos conceitos e para o fundamento dos procedimentos a seguir.

Por fim, a resolução de problemas deve ser uma prática frequente nas aulas de Matemática (Abrantes, 1989), assim como, a diversidade das tarefas a propor – o manual *Matematicamente Falando* (Conceição & Almeida, 2011) proporciona aos alunos e professores uma enorme variedade de tarefas. Apesar de se tratar de um método que dá um certo trabalho (mas saudável) tanto para os professores quanto para os alunos, pois ambos têm que interagir e quebrarem a rotina da aula. Assim, a sua utilização contribui para o ensino de conceitos matemáticos tornando a aprendizagem do aluno mais interessante e, ao mesmo tempo, baseada na compreensão e no pensamento do aluno e na relação que ele pode estabelecer entre a formalização matemática e a resolução de problemas do quotidiano.

3.4 Conceitos matemáticos

No processo ensino aprendizagem, as definições e conceitos matemáticos cumprem um papel fundamental. As aulas lecionadas tiveram como objetivo a compreensão do que é uma equação (incompleta) do 2.º grau a uma incógnita, assim como, a resolução deste tipo de equações (que são equações algébricas envolvendo apenas polinómios de grau dois numa só variável).

Sendo a Álgebra o tema sobre o qual incide este estudo, exponho em seguida os conceitos e propriedades matemáticas trabalhadas ao longo desta unidade didática, assim como outros que, apesar de serem indiretamente trabalhados nas aulas lecionadas, são fundamentais para a compreensão dos restantes.

As definições e conceitos matemáticos que surgem em seguida baseiam-se no Compêndio de Álgebra (1968), de Sebastião e Silva e de Silva Paulo.

Uma *expressão algébrica* é qualquer expressão com números e/ou letras em que todas as operações nela indicadas estão incluídas entre as seguintes: adições, subtrações, multiplicações, divisões e extrações de raiz.

Designa-se *monómio* a uma expressão algébrica em que as operações indicadas sobre as variáveis são, quanto muito, multiplicações. Diz-se *grau dum monómio* à soma dos expoentes das suas variáveis. Por exemplo, as expressões: $\frac{3}{2}x^2y$, $-x^2$, $\frac{x}{2}$ e $\sqrt{2}$, são monómios de graus 3, 2, 1 e 0, respetivamente.

Por vezes, um monómio não é somente um número, mas é constituído por duas partes: o *coeficiente* (parte numérica) e a *parte literal* (parte constituída por letras). Logo, quando um monómio é um número, diz-se que este não tem parte literal.

Dois monómios dizem-se *semelhantes* quando têm a mesma parte literal. Os monómios semelhantes podem ser adicionados, mas para isso é necessário adicionar-se os coeficientes, mantendo-se a parte literal. Quanto à multiplicação de monómios, quaisquer monómios podem ser multiplicados, obtendo-se, deste modo, um novo monómio.

Chama-se *polinómio* a toda a expressão que se obtém ligando por notação aditiva vários monómios, que passam a chamar-se *termos* do polinómio. Em particular, chamamos *binómio* a um polinómio com dois termos e *trinómio* a um polinómio com três termos. Quando um polinómio não tem termos semelhantes diz-se um *polinómio reduzido*.

Dado um polinómio e reduzido os seus termos semelhantes, diz-se *grau do polinómio* o maior dos graus dos seus termos de coeficiente não nulo. Quando o polinómio se reduz a uma constante, diferente de zero, diz-se que o seu grau é zero.

Quando os termos de um polinómio apresentam um ou mais fatores comuns, podemos colocá-los em evidência, decompondo o polinómio em fatores, ou seja, proceder à sua *factorização*. Esta operação envolve a aplicação da propriedade distributiva e/ou a utilização dos casos notáveis da multiplicação.

A igualdade entre duas expressões reporta-nos para a seguinte questão: “Quais são os números que, tomados como valores da variável na igualdade, transformam esta numa igualdade numérica verdadeira?”. Como resposta a esta pergunta, uma igualdade passa a ser considerada uma equação. Assim sendo, chama-se *equação* a toda a igualde cujos membros contêm uma ou mais variáveis, que recebem o nome de incógnitas e que representam quantidades desconhecidas. Ao lado esquerdo da igualdade chamamos *primeiro membro* e ao lado direito *segundo membro*. As equações em que ambos os membros são expressões algébricas dizem-se equações algébricas.

Se a equação tem uma só incógnita, dá-se o nome de *raiz* ou *solução* da equação a todo o número que, ao ser atribuído à incógnita, transforme a equação numa igualdade numérica verdadeira. Se a equação tem uma ou várias soluções, podemos classifica-la como *possível* ou *resolúvel*, caso não tenha nenhuma solução classifica-se como *impossível* ou *insolúvel*. E *resolver* uma equação possível é encontrar a sua solução ou as suas soluções.

Uma equação diz-se *equivalente* a outra, quando toda a raiz da primeira equação é raiz da segunda e, reciprocamente, toda a raiz da segunda equação é raiz da primeira, ou quando ambas são impossíveis. A passagem de uma equação a outra que lhe seja equivalente designa-se por *transformação de equivalência*. Estas transformações podem reduzir-se a três princípios de equivalências:

- *1.º Princípio de Equivalência.* Substituindo um dos membros duma equação por uma expressão equivalente a esse membro, obtém-se uma equação equivalente à primeira. Exemplos de transformações deste tipo de princípio: desembaraçar a equação de parênteses e, reduzir os termos semelhantes.
- *2.º Princípio de Equivalência.* Quando se soma a mesma expressão a ambos os membros de uma equação, obtém-se uma equação equivalente à primeira.
- *3.º Princípio de Equivalência.* Quando se multiplica ambos os membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente à primeira. Exemplos de transformações que se baseiam neste princípio: desembaraçar de denominadores (quando estes são números inteiros), multiplicando ambos os membros pelo menor múltiplo comum dos denominadores e, passar um fator numérico de um membro para o outro, com inversão.

O produto de dois ou mais números só pode ser zero, quando um, pelo menos, desses números é zero. De um modo geral, a referida propriedade permite-nos estabelecer o seguinte *princípio de decomposição*: quando o primeiro membro duma equação é o produto de duas ou mais expressões e o segundo membro é zero, as raízes da equação são as raízes das equações em que se decompõe a primeira, igualando a zero cada um dos fatores do primeiro membro, e só essas. Este princípio é fundamental para trabalhar as equações que são objeto deste estudo.

Dentro das equações, chama-se *equação do 1.º grau numa incógnita* x, ou *equação linear*, a toda a equação que, por aplicação dos princípios de equivalência, se pode reduzir à forma $ax + b = 0$, sendo a e b números reais quaisquer com $a \neq 0$.

Dentro das equações, chama-se *equação do 2.º grau numa incógnita* x, a toda a equação que, pela aplicação dos princípios de equivalência, se possa reduzir à *forma canónica*: $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b, c números quaisquer (coeficientes) em que $a \neq 0$. Como caso particular, tem-se a *equação binómio do 2.º grau* uma equação do tipo $x^2 - \alpha = 0$, sendo α um número qualquer (real no nosso caso). Tal equação é equivalente à equação $x^2 = \alpha$, que traduz o problema de extração da raiz quadrada. Para qualquer valor real de α, esta equação tem pelo menos duas raízes, simétricas entre si: se $\alpha \geq 0$, essas duas raízes são reais e representam-se por $\sqrt{\alpha}$ a raiz positiva e por $-\sqrt{\alpha}$ a raiz negativa; se $\alpha < 0$, as duas raízes são números imaginários puros (este caso será estudado no ensino secundário).

3.5 Planificação da unidade temática

No início do ano letivo foi elaborada, em reunião de grupo disciplinar, a planificação desta unidade de ensino (Quadro 3.1). Em conformidade com o que aconteceu na planificação de outros tópicos, a atribuição de 10 tempos de 45 minutos à lecionação das equações do 2.º grau a uma incógnita consiste num valor de referência e não um valor vinculativo, pois cabe a cada docente efetuar os ajustes que considera necessários, em função das características das turmas que leciona.

Equações do 2.º grau a uma incógnita	
Especificação dos subtemas	**Objetivos**
▪ Resolução de equações do 2.º grau	▪ Traduzir o enunciado de um problema de linguagem natural para linguagem matemática; ▪ Decompor um binómio ou trinómio em fatores, com vista à resolução de equações; ▪ Resolver equações do 2.º grau, procurando utilizar o processo mais adequado a cada situação, nomeadamente, a lei do anulamento do produto e a noção de raiz quadrada; ▪ Interpretar e analisar as soluções ou a impossibilidade de uma equação, no contexto de um problema.

Quadro 3.1 – Subtema trabalhado no âmbito da unidade de ensino: "Sequências e regularidades. Equações".

Planificar, segundo Abrantes (1985), passa inevitavelmente por "refletir sobre a ação que se vai levar a cabo, decidir sobre os princípios dessa ação, escolher processos adequados para atingir esses objetivos" (p. 1). Ao planificar uma unidade didática, existem inúmeros fatores a considerar, como por exemplo o facto de não bastar escolher as tarefas. É fundamental eleger uma sequência para implementar as tarefas.

A concepção atempada das tarefas a propor aos alunos, o grau de aprofundamento estabelecido para cada tarefa e o conhecimento das características da turma participante no estudo permitiram-me prever antecipadamente a necessidade de recorrer a mais aulas para a lecionação deste subtema. Cada aula foi preparada tendo em conta os objetivos específicos, as dificuldades possivelmente evidenciadas pelos alunos e os seus conhecimentos prévios. Foram, também, pensadas com o objetivo de responder às questões do estudo.

Abrantes (1985) refere, ainda, que "o professor deve planear cuidadosamente as ações de ensino-aprendizagem e, ao mesmo tempo, (…) deve ser flexível na execução do seu plano de trabalho" (p. 1). Assim, a planificação das aulas sofreu algumas alterações com o decorrer da lecionação.

Este estudo foca-se na subunidade "Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita", que teve como objetivos específicos: (i) a conversão da linguagem materna para linguagem matemática; (ii) qual a estratégia usada pelos alunos; (iii) a compreensão e utilização dos casos notáveis da multiplicação de binómios e a (iv) resolução de equações do 2.º grau a uma incógnita.

Este tema foi por mim lecionado na turma 8.º 3.ª da Escola Básica 2, 3 de Fernando Pessoa, a 4 de Março, a 4 de Abril e de 29 de Abril a 9 de Maio do corrente ano (treze aulas de 45 minutos), ou seja, duas aulas antes de iniciar a unidade, que coincide com o final do 2.º período e primeira aula do 3.º período do presente ano letivo, e as restantes aulas no 3.º período. Durante a minha intervenção, para a realização deste estudo, houve uma interrupção: as férias da Páscoa (16 de Março a 1 de Abril).

Estas duas aulas foram o elo de ligação entre a unidade anterior – "Sólidos geométricos" – e a unidade "Sequencias e regularidades. Equações", surgem também como revisão dos conceitos já trabalhados, nomeadamente, as propriedades e as regras das operações em $\mathbb{Q}$; o uso de expressões numéricas que envolvam números racionais; os polígonos e as respetivas características, áreas e perímetros; as diversas decomposições de polígonos; os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra; a simplificação de expressões algébricas; o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum; as diversas isometrias; o método de substituição e os princípios de equivalência nos sistemas; os princípios e regras para a resolução de equações; entre outros.

Serviram também, de iniciação ao estudo de resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita e, em especial, para detetar os erros e as dificuldades que os alunos evidenciam e que estratégias e representações utilizam, para resolver equações deste tipo pela primeira vez, sem antes terem falado destas equações.

Este leque de aulas procuraram contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, porque foram contempladas as suas vertentes: (i) representar, (ii) raciocinar e (iii) resolver problemas. E na aprendizagem do tópico Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, neste nível de escolaridade, é necessário dar atenção às dificuldades dos alunos associadas aos conceitos básicos referentes às equações, às dificuldades que resultam da complexidade crescente das expressões envolvidas nos dois membros de uma equação e também às dificuldades que resultam de uma incompleta apreensão dos conceitos aritméticos (Ponte, Branco & Matos, 2009).

O quadro seguinte (Quadro 3.2) apresenta uma calendarização geral das tarefas propostas nas aulas lecionadas, as quais incluem doze fichas de trabalho e um teste. As fichas de trabalho abrangem todos os conteúdos relativos a este subtema que constam do programa em vigor. O teste constituiu um momento específico de avaliação realizado, individualmente, no final da lecionação da unidade "Sequencias e regularidades. Equações".

Sequências e regularidades. Equações		
Aula (data)	**Tarefas** **(Anexo 2)**	**N.º de tempos realizados** **(45 minutos)**
Aula 1 4 de Março	Tarefa 1: *Quem tem razão?*	2
Aula 2 4 de Abril	Tarefa 2: *A vedação do terreno*	2
Aula 3 29 de Abril	Tarefa 3: *À descoberta de números…* Tarefa 4: *Aplico o que aprendi - I*	2
Aula 4 2 de Maio	Tarefa 5: *A queda do foguete* *PowerPoint* Tarefa 6: *As janelas quadradas* Tarefa 7: *Aplico o que aprendi - II*	2
Aula 5 3 de Maio	*PowerPoint* Tarefa 8: *Mais desafios - I*	1
Aula 6 6 de Maio	Tarefa 9: *Mais desafios - II* Tarefa 10: *Mais desafios - III*	2
Aula 7 9 de Maio	Tarefa 11: *Cubos e pirâmides quadrangulares* Tarefa 12: *Azulejos quadrados*	2
Aula 8 16 de Maio	Teste de Avaliação (Anexo 3)	2

Quadro 3.2 – Calendarização das aulas lecionadas.

3.5.1 Tarefas e recursos

A escolha, elaboração e/ou adaptação de tarefas, segundo o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007), é muito importante, uma vez que "a aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e este é estruturado, em grande medida, pelas tarefas propostas pelo professor" (p. 8). O professor tem, assim, o dever de proporcionar aos seus alunos momentos de aprendizagem com os diferentes tipos de tarefas – umas com questões mais rotineiras e outras com questões mais desafiantes e exploratórias – fazendo escolhas conscientes atendendo aos objetivos a atingir e às características da turma (Ponte et al., 2007).

Ao elaborar e selecionar as tarefas, a propor aos alunos nesta unidade de ensino, a minha principal preocupação foi proporcionar momentos de aprendizagem significativa, atribuindo ao aluno um papel ativo na construção do seu próprio conhecimento. Sei, igualmente, o quanto é essencial e importante sustentar elevadas expectativas e foi neste sentido que mantive e lhes propus este desafio que, considero exigente.

A aprendizagem dos alunos pode ser promovida através de um trabalho de cunho exploratório e investigativo, ou seja, as tarefas não constituem simples exercícios em que têm que aplicar conhecimentos previamente adquiridos, mas exigem uma resposta original – no sentido de os alunos optarem por diferentes estratégias de resolução – ainda que fundamentada em conhecimentos e experiências prévias (Ponte & Serrazina, 2009).

Segundo Canavarro (2011), o ensino exploratório da Matemática é caracterizado, pelo facto, de os alunos aprenderem através da realização de tarefas que permitam o surgimento ou a necessidade das ideias matemáticas que *a posteriori* serão sistematizadas em discussões coletivas. Este tipo de ensino pressupõe que os alunos possam trabalhar tarefas interessantes, criando as suas próprias estratégias e construindo conhecimento de uma forma que evidencia a necessidade ou a vantagem de uma determinada ideia, conceito ou procedimento matemático (Canavarro, 2011).

Tentei, assim, proporcionar aos alunos a possibilidade de passarem pela experiência da "descoberta" dos conhecimentos e procedimentos matemáticos e, simultaneamente, de desenvolverem capacidades matemáticas como, por exemplo, a resolução de problemas, o pensamento algébrico, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Isto acontece quando as tarefas têm como objetivo desenvolver o pensamento algébrico, a linguagem e a capacidade de interpretar, embora cada uma delas apresente um conjunto de objetivos específicos.

As tarefas propostas aos alunos, durante a lecionação da unidade de ensino, encontram-se em anexo (Anexo 2) foram selecionadas e adaptadas, em grande parte, do manual *Matematicamente Falando 8* (Conceição & Almeida, 2011), do manual *Matemática 8 - Parte 2* (Neves et al., 2011) e, também, da brochura da Álgebra (Ponte, Branco, & Matos, 2009), do *Projeto 1001 Itens* (ME-GAVE, 2006) e outras por mim criadas. Procurei, assim, tentar variar a origem das tarefas. O manual ofereceu tarefas exploratórias de grande interesse e, por isso, nem sempre considerei necessário construir novas tarefas, quando por vezes estão mesmo ao nosso lado.

As tarefas foram elaboradas e selecionadas tendo em conta as aprendizagens prévias dos alunos. Procurei que as tarefas propostas conduzissem os alunos à construção de novos conhecimentos, através das descobertas das suas próprias estratégias e da mobilização dos seus conhecimentos.

As primeiras tarefas de exploração (*Quem tem razão?* e *A vedação do terreno*) serviram para perceber como os alunos se desenvencilhavam deste tipo de problema, sem terem estudado equações do 2.º grau, ou seja, estas tarefas foram dadas aos alunos antes de iniciar a unidade “Sequências e regularidades. Equações”.

A tarefa de exploração (*À descoberta de números…*) possibilita a resolução de equações do 2.º grau a uma incógnita – utilizando a lei do anulamento do produto, a decomposição em fatores e a noção de raiz quadrada; compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra; simplificar expressões algébricas; efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação; e compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios. A tarefa que se segue (*Aplico o que aprendi - I*) serviu, tal como o nome indica, para aplicar o que “descobriram” e para consolidar, sobre a forma de exercícios.

O objetivo da tarefa: *A queda do foguete* é o recapitular da resolução algébrica da equação do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, revisitando a propósito a factorização de polinómios, pelo processo de colocar factores comuns em evidência, e a lei do anulamento do produto. Procurando contextualizar e dar significado a estas equações. Como forma de extensão e conclusão desta tarefa, tentei ir um pouco mais além. Projetando uma apresentação em PowerPoint (do diapositivo 1 ao 5) que continha a representação gráfica da função e da trajetória do foguete (realizada no GeoGebra). Este recurso teve como objetivo proporcionar, aos alunos, um lamiré do que irão aprender futuramente.

Na tarefa: *As janelas quadradas*, os alunos, resolveram um problema, podendo recorrer a uma equação do 2.º grau a uma incógnita, utilizando a noção de raiz quadrada. A tarefa que se segue (*Aplico o que aprendi - II*) serviu, tal como o nome indica, para aplicar o que "descobriram" e para consolidar, sobre a forma de exercícios.

Depois dediquei uma aula de 45 minutos (3 de Maio) e uma de 90 minutos (6 de Maio) para a realização das tarefas *Mais desafios I, II e III*. Estas tarefas dão primazia à resolução de problemas e tiveram como propósito principal o revisitar dos conceitos aprendidos durante esta unidade, verificando se os alunos os apreenderam e se os detetaram durante a realização da tarefa e, também, levar os alunos a mobilizar os conhecimentos relativos às equações do 2.º grau (incompletas), as quais constituem mais uma ferramenta que permite resolver diversas situações problemáticas.

Enquanto nas tarefas *Aplico o que aprendi* (Tarefa 4 e 7) reservei lugar para a resolução de algumas equações, por sua vez, nas tarefas *Mais desafios* (Tarefa 8, 9 e 10) assumi que ao resolverem uma miscelânea de problemas que envolvessem equações também estariam a resolver equações (incompletas) do 2.º grau. Tentei que os problemas fossem diversificados e incluíssem outros conhecimentos matemáticos.

Em grande parte da aula de 9 de Maio, apresentei aos alunos uma tarefa de cunho exploratório *Cubos e pirâmides quadrangulares* – com recurso a material manipulável (Figura 3.5), criado por mim – para que pudessem interpretar, abertamente, a tarefa em vez de se limitarem a resolve-la de uma forma quase mecânica.

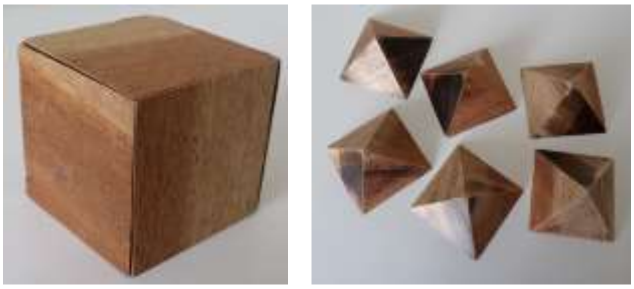


Figura 3.5 – Materiais manipuláveis utilizados na tarefa: *Cubos e pirâmides quadrangulares*.

Esta tarefa de carácter aberto, com varias possibilidades de resoluções tem, também, como objetivo promover um trabalho em equipa, provocar curiosidade nos alunos e criar uma maior participação dos alunos no momento de discussão em grande-grupo (comunicar matematicamente), assim como, contribuir para o desenvolvimento da autonomia e confiança matemática dos alunos. Para finalizar esta aula, resolvemos em grande grupo a tarefa *Azulejos quadrados*, de modo a, efetuar um balanço entre o estado das aprendizagens reais e aquilo que era esperado.

Por fim, no dia 16 de Maio, os alunos realizaram, individualmente, um teste de avaliação sumativa, onde avalio o conhecimento deste subtema lecionado. O problema (Anexo 3) e os respetivos critérios específicos de classificação que criei para avaliar o conhecimento destes alunos no teste de avaliação sumativa assemelha-se aos problemas "tipo" dos exames nacionais do 3.º ciclo do ensino básico. A forma como está redigido e estruturado este problema teve, também, o propósito de os preparar para o futuro.

Todas as tarefas foram desenvolvidas em trabalho individual, com possibilidade de discussão entre os alunos, e no final de cada aula houve sempre um momento de discussão e sistematização das tarefas, em grande grupo. Em algumas aulas usei como recursos: o *powerpoint* e materiais manipuláveis (em geral, permitem investigar, levantar e testar conjecturas e, assim, construir conhecimentos). E sempre que achei pertinente e oportuno, pedi aos alunos para realizarem, em casa, outros exercícios e problemas do seu manual, com o objetivo de consolidar os assuntos abordados nas aulas. Devido ao empenho demonstrado pelos alunos nas tarefas que propus, houve em algumas aulas a falta de tempo para discutir as tarefas *Aplico o que aprendi I e II*, mas para ultrapassar esta situação entreguei nas aulas seguintes a correção das respetivas tarefas.

Naturalmente reconhecemos que o desenvolvimento da visualização e o sentido espacial, explícito na tarefa de exploração "Cubos e pirâmides quadrangulares" (Tarefa 11), assim como, os conteúdos/metodologias, conteúdos/processos ou conhecimentos/capacidades são alguns aspetos problemáticos no ensino da matemática, refletindo-se assim nas dificuldades de aprendizagem dos alunos. Deste modo, e como forma de tentar ultrapassar estas dificuldades, os professores devem apelar a recursos educativos para facilitarem os processos de ensino e aprendizagem, tais como os materiais didáticos.

Os materiais manipuláveis são objetos que envolvem fisicamente os alunos, permitindo assim que aprendam os conteúdos com mais interesse e motivação. Segundo Serrazina (1991), os materiais manipuláveis são "objetos, instrumentos ou outros media que podem ajudar os alunos a descobrir, a entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem" (p. 37).

Os alunos utilizaram materiais didáticos nesta tarefa, pois estes materiais facilitam e motivam a aprendizagem dos alunos. Estes materiais, segundo Lopes (2010),

> influenciam as atividades de ensino e aprendizagem, especialmente ao permitirem tornar mais concretas as ideias abstratas características da matemática. Aprender a utilizar os materiais didáticos que otimizem a função de todos os sentidos, designadamente ouvir, ver e sentir, certamente permitirá melhorar a aprendizagem dos alunos. (p. 45)

3.5.2 Estratégias de ensino

Não são apenas as tarefas que têm um papel principal no ensino, é também, importante e decisivo o papel e a ação do professor, que principia com a seleção e a planificação das tarefas matemáticas, com um objetivo e propósito matemático muito bem delineado. O papel do professor na sala de aula, para além de gerir o trabalho dos alunos, consiste em interpretar e compreender como estes resolvem as tarefas e de explorar/aprofundar as suas respostas de modo a aproximar e articular as suas ideias com aquilo que é esperado que aprendam. Por estas razões é que este tipo de ensino é considerado, por alguns professores, uma atividade complexa (Stein et al., 2008).

Além disso, o papel do professor é primordial na escolha das estratégias de ensino a adotar. Segundo o NCTM (2007), os alunos aprendem Matemática através das experiencias que os professores lhes proporcionam.

> Os professores estabelecem e alimentam um ambiente que conduz à aprendizagem da matemática através das decisões que tomam, das conversas que moderam e do ambiente físico que criam. São as ações dos professores que encorajam os alunos a pensar, a questionar, a resolver problemas e a discutir as suas ideias, estratégias e soluções. O professor é responsável pela criação de um ambiente intelectual, no qual o raciocínio matemático sério constitui a norma. Sendo mais do que um ambiente físico de mesas, quadros e *posters* o ambiente da sala de aula transmite mensagens subtis acerca do que é valorizado na aprendizagem e no fazer matemática. (NCTM, 2007, p. 19)

Para que isto aconteça, os professores devem saber e compreender a Matemática que ensinam, devem ser capazes de utilizar e partilhar os seus conhecimentos de forma flexível no decorrer da sua lecionação, assim como, escolher criteriosamente as estratégias, os materiais didáticos, e o método de ensino a utilizar.

O método de ensino que pretendo proporcionar aos alunos, na maioria das aulas, será o *ensino-aprendizagem exploratório*, ou *ensino por descoberta* em que "o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (Ponte, 2005b, p. 22). Os principais momentos de uma aula exploratória são, segundo Stein et al. (2008): (i) apresentação da tarefa; (ii) trabalho autónomo/exploração dos alunos (no meu caso de estudo será individual e/ou em díade, pois na turma em questão já é um método a que os alunos estão bastante habituados, o que considero ser uma vantagem; (iii) discussão coletiva em grupo-turma e (iv) síntese.

Estes momentos estiveram presentes nas aulas que lecionei, porque os considero fundamentais para o propósito destas aulas. É importante clarificar os objetivos concretos de aprendizagem de cada tarefa e perspetivar a sua utilização na aula, tendo como preocupação que os alunos adiram à tarefa (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). Marquei este momento e apresentação da tarefa lendo em voz alta o enunciado de algumas das tarefa e discutindo com os alunos o significado de alguns termos. Informei os alunos para o facto de registarem, sempre, o modo como pensam, nas folhas que distribui, ofereci aos alunos apresentações em *power point* e, informei-os, do tempo que teriam para resolver cada tarefa que propus.

Considero o simples ato de interagir, como forma de ajudar o aluno a acreditar em si mesmo e a sentir-se seguro. Nas aulas que lecionei, tentei ter muito cuidado no tipo de feedback que dava aos alunos, durante o seu trabalho autónomo, de modo a, que os meus comentários não diminuíssem o nível cognitivo da tarefa e que esta se mantivesse desafiante, por exemplo, a apoiar os alunos na estratégia que escolheram, não os influenciando a tomar um determinado caminho. Tentei, também, ter o cuidado de nunca validar as produções matemáticas elaboradas pelos alunos, de modo a, não quebrar a expectativa destes em relação ao trabalho já desenvolvido ou a desenvolver. No entanto, é fundamental que o professor compreenda a matemática dos seus alunos, que por vezes, apesar de correta, vai num sentido diferente do esperado/planificado pelo professor (Stein et al., 2008).

Sempre que possível circulei pelos alunos para: (1) identificar o potencial das estratégias usadas; (2) observar as ideias matemáticas que surgiam e estavam a ser trabalhadas; (3) identificar respostas inesperadas e erros; (4) avaliar as produções escritas e (5) confronta-las com as expectativas que tinha quando planifiquei estas tarefas. E agora sim, mais um momento importantíssimo, o momento em que o professor toma decisões (fundamentadas pelos pontos anteriores) sobre o prosseguimento da aula, ou seja, o professor identifica os alunos cujas respostas são importantes para partilhar com toda a turma no momento da discussão, de modo a, que a discussão tenha um fio condutor e que proporcione, aos alunos, uma diversidade de resoluções/estratégias e que mesmo os alunos que não tenham chegado à solução final, possam participar da discussão (Stein et al., 2008).

Nas discussões coletivas, é importante comparar estratégias, analisando as suas potencialidades e discutindo as suas fragilidades, para que os alunos aprendam, não só com a atividade que realizam, mas também, com a reflexão que fazem sobre ela (Ponte et al., 2007). Considero, também, importante discutir aprendizagens matemáticas relacionadas com as tarefas que propus, para que os alunos percebam que estão a aprender conteúdos matemáticos e, também, para estabelecer conexões entre os vários tópicos matemáticos.

Para planificar uma certa unidade didática é necessário ter em conta alguns aspetos: as orientações curriculares, as características da turma, a metodologia de trabalho, a seleção de tarefas, as condições e recursos da escola (Ponte, 2005b). Colocar em prática este tipo de ensino obriga o professor a planear e refletir detalhadamente sobre as tarefas a propor, o seu papel e o papel do aluno, e também, a comunicação entre ambos (Ponte & Serrazina, 2009). Mas isto não significa, de modo algum, que se perca o fio condutor que existe numa planificação, ou seja, o professor não pode perder de vista os seus objetivos em termos das aprendizagens matemáticas que quer promover. Significa é que o plano não pode ser rígido, mas sim flexível ao ponto de permitir ao professor inserir novos elementos, mudar de rumo, se o exigirem as necessidades e/ou interesses do momento.

3.5.3 Avaliação

A avaliação tem vindo a desempenhar, cada vez mais, uma função pedagógica como elemento regulador no processo de ensino-aprendizagem permitindo, tanto ao professor como ao aluno, acompanhar esse processo, detetando erros, falhas e apurando em que medida os objetivos definidos estão a ser alcançados (Santos, 2002).

Neste sentido, o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007) defende que a avaliação permite ao professor recolher “a informação que lhe permite apreciar o progresso dos alunos na disciplina e, em particular, diagnosticar problemas e insuficiências na sua aprendizagem e no seu trabalho, verificando assim a necessidade (ou não) de alterar a sua planificação e ação didática” (pp. 11-12).

Para isso, segundo os mesmos autores, a avaliação deve: (i) ser congruente com o programa; (ii) constituir uma parte integrante do processo de ensino e aprendizagem; (iii) usar uma diversidade de formas e instrumentos de avaliação; (iv) ter predominantemente um propósito formativo; (v) decorrer num clima de confiança em que os erros e as dificuldades dos alunos são encarados por todos de forma natural como pontos de partida para novas aprendizagens e (vi) ser transparente para os alunos e para as suas famílias, baseando-se no estabelecimento de objetivos claros de aprendizagem (Ponte et al., 2007, p. 12).

Em concordância com estes autores e tratando-se de um estudo realizado no contexto natural de sala de aula, decidi que todo o trabalho desenvolvido neste estudo teria características semelhantes ao que foi desenvolvido com os alunos, desde o início do ano letivo. Desta forma, a avaliação é feita diariamente onde são observados o empenho demonstrado na aula e na realização e discussão das tarefas, a capacidade de comunicar oralmente as suas ideias, o comportamento e a realização dos trabalhos de casa.

Segundo Pinto e Santos (2006) a avaliação e as suas funções no domínio escolar podem dividir-se em dois grandes quadros conceptuais: a avaliação formativa, vista como um instrumento de regulação pedagógica, e a avaliação sumativa, vista como medida ou balanço dos saberes. Da avaliação formativa advém a análise e a interpretação do afastamento entre o produto esperado e o realizado e as orientações que posteriormente se fornecem aos alunos são o que caracterizam este tipo de avaliação.

Em relação à avaliação do tema de ensino que lecionei, todas as tarefas foram objeto de avaliação formativa (NCTM, 2007), onde a regulação pedagógica se faz através de *feedback* descritivo (Black & Wiliam, 1998). Este *feedback* tem, para mim, um papel de grande relevância, porque quando realizado de uma forma descritiva, auxilia o aluno a progredir na sua aprendizagem (Black & Wiliam, 1998; Fernandes, 2005). A última tarefa da unidade de ensino fez parte da ficha de avaliação sumativa realizada no final do ano.

Embora seja através da avaliação formativa que os professores conseguem retirar provas necessárias para poderem fazer inferências sobre o que os seus alunos sabem e o que necessitam aprender, porém, diversos estudos mostram que a realidade nas escolas portuguesas é contrária a esta prática (Alves, 2004; Fernandes, 2005; Pinto & Santos, 2006), pois revelam que a avaliação formal (sumativa) é a prática mais frequente, pelos professores. Para mim, este tipo de avaliação pode dar informação incompleta e por vezes errada dos conhecimentos dos alunos, porque trabalham sobre pressão e em tempo limitado, mas sou da opinião que esta realidade deve ser trabalhada e é nosso dever prepara-los para esta realidade.

3.6 As aulas lecionadas

Quando iniciei a lecionação desta unidade de ensino estava bastante entusiasmada e expectante em relação ao modo como a mesma iria decorrer. Além de atender, na sua planificação, às orientações curriculares vigentes, procurei seguir também as orientações metodológicas adotadas pela professora da turma, desde o início do ano, com as quais me identificava. Além disso, considerei importante explicar aos alunos, no início desta unidade de ensino, o que me propunha fazer e quais os objetivos do estudo em que eles iriam participar, enfatizando a necessidade da sua colaboração. No entanto, o ambiente que se viveu na aula, ao longo de toda a unidade de ensino, foi muito enriquecedor pois os alunos procuraram corresponder ao que propunha e desenvolveram comigo uma boa relação.

As aulas iniciaram-se sempre comigo a ditar o sumário imediatamente a seguir à entrada dos alunos na sala (os números das lições e a data já estavam escritos no quadro) para que não se dispersassem em conversas paralelas e pudessem começar o trabalho sem demoras. Após a distribuição do enunciado da tarefa, procedia-se à leitura do seu enunciado em voz alta, por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir o esclarecimento das questões que surgiram na sua interpretação. Relembrava-os, igualmente, que podiam recorrer às estratégias que achassem pertinentes e que deviam apresentar e justificar sempre os seus raciocínios, não esquecendo a resposta ao problema.

Durante o trabalho autónomo dos alunos, individualmente ou a pares, percorri a sala de aula procurando acompanhá-los, esclarecendo dúvidas e ajudando-os a ultrapassar dificuldades mas sem lhes dar respostas diretas ou validar as suas. Algumas vezes procedi a explicações e esclarecimentos para toda a turma, sobretudo quando detetei dificuldades generalizadas. Tentei, ainda, colocar questões que me permitissem compreender melhor as suas estratégias e os seus raciocínios que fui registando em notas de campo.

No final da exploração de cada uma das tarefas, realizei uma discussão coletiva, onde os alunos apresentaram oralmente (ou no quadro) as suas conclusões, explicitaram os seus raciocínios, confrontaram diferentes estratégias e refletiram sobre o trabalho realizado. Procurei que todos os alunos participassem, dando-lhes oportunidade de argumentar e explicar as suas estratégias e resoluções e permiti que os restantes alunos interpelassem os colegas, aproveitando os erros e as dificuldades evidenciados nas suas respostas. Por vezes, a minha intervenção foi no sentido de levantar questões importantes mas que não tinham sido apresentadas por nenhum grupo. No final das discussões ainda sistematizei as aprendizagens daí resultantes que os alunos registaram nos seus cadernos.

4 de Março de 2013 (90 minutos)

4 de Abril de 2013 (90 minutos)

As duas primeiras aulas tinham um objetivo comum, perceber como é que os alunos abordavam problemas que envolviam a resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita sem terem sido formalmente ensinadas. Assim, propôs-se um trabalho focado na: (1) conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica; (2) introdução à resolução de equações literais em ordem a uma incógnita; (3) operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação; e (4) introdução informal à resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita.

Após a leitura do enunciado, esclareci algumas questões relativas ao significado de algumas das suas palavras, como por exemplo, “repavimentar” e “losangos”, na tarefa 1 e “quadrilátero” e “vedado” na tarefa 2. Aproveitei também estas questões para relembrar estes conceitos geométricos e as suas propriedades.

Os alunos empenharam-se bastante na resolução destas tarefas, embora o tempo utilizado na tarefa 1 tenha ultrapassado o inicialmente previsto. Enquanto circulava pela sala, apercebi-me que os alunos estavam com algumas dificuldades na primeira questão desta tarefa e que, de certa forma limitava a resolução das questões seguintes. Por isso, optei por fazer a discussão em grande grupo em duas fases, logo após a primeira questão e depois de disponibilizar mais algum tempo para os alunos concluírem as outras questões da tarefa.

No momento de discussão das duas tarefas, foram exploradas duas propostas de resolução diferentes e referiu-se de novo a noção de equilíbrio presente numa igualdade. Questionei a turma acerca do tipo de equação que traduzia o problema, levei-os a compreender o significado das soluções da equação no contexto do problema, assim como, a relação entre o expoente e as soluções de uma equação do 2.º grau possível e determinada. Outras questões foram colocadas à turma como forma de síntese e de um revisitar dos conhecimentos já estudados (quer neste ano letivo, assim como, nos anos letivos anteriores) e toda a planificação foi cumprida.

Estas tarefas foram bastante importantes, porque permitiram começar a introduzir os conceitos/procedimento que iria desenvolver no próximo capítulo a lecionar.

29 de Abril de 2013 (90 minutos)

Esta aula foi a primeira destinada ao trabalho formal no tópico das equações do 2.º grau, com a introdução da lei do anulamento do produto. Por isso, o seu objetivo prendia-se com a conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica e com a resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, através da lei do anulamento do produto. Na discussão em grande grupo optei por explorar, com os alunos, duas resoluções incorretas. O objetivo era levar os alunos a identificar e justificar os erros cometidos com maior frequência e chamar a atenção para a utilização de estratégias que dificultam a resolução porque requerem procedimentos ainda não conhecidos dos alunos, como é o caso da fórmula resolvente para resolver equações do 2.º grau completas.

Planeei, ainda, outra tarefa (Tarefa 4 - “Aplico o que aprendi – I”) para que os alunos aplicassem e consolidassem as suas aprendizagens e que consistia na resolução de equações de 2.º grau, a uma incógnita, utilizando a lei do anulamento do produto. No entanto, não foi possível realizá-la na sala de aula porque a tarefa anterior ocupou os alunos mais tempo que o previsto. Reconhecendo a importância desta tarefa, quer para os alunos consolidarem conhecimentos, quer para eu perceber as aprendizagens realizadas e as suas eventuais dificuldades, decidi enviá-la para trabalho de casa que foi depois devolvido aos alunos com correções e alguns comentários com reforço positivo, no sentido de os levar a melhorar num próximo trabalho.

A reflexão sobre estas aulas salientaram a necessidade de aprofundar, na próxima, a utilização da lei do anulamento do produto com mais do que 2 fatores, reforçando a ideia de que quando um produto é zero, pelo menos, um dos seus fatores tem de ser zero, levando os alunos a atribuírem mais significado a esta lei. Estes aspetos foram contemplados na planificação da aula seguinte.

2 de Maio de 2013 (90 minutos)

Esta aula perspetivava um grande desafio, tanto para mim, como para os alunos, uma vez que iriam ser abordados conceitos e procedimentos que só serão formalizados no próximo ano letivo.

A aula foi dividida em duas partes, com objetivos diferentes. Na primeira parte, os alunos exploraram a tarefa "A queda do foguete" com o objetivo de utilizarem a lei do anulamento do produto, para a resolução da equação. Para isso, os alunos têm que interpretar corretamente a expressão algébrica dada no enunciado da tarefa; compreenderem a diferença entre as soluções da equação e a solução da tarefa; e fazerem a conexão entre as funções e a resolução de equações.

Devido às dificuldades iniciais apresentadas pelos alunos na interpretação do enunciado desta tarefa, senti a necessidade de lhes dar mais tempo para a concluírem, antes de iniciar a discussão e a extensão da tarefa (*Power Point* utilizado na 4.ª aula, Anexo 1). Os alunos mostraram-se bastante entusiasmados com a apresentação que fiz em PowerPoint, com a representação gráfica da função disponibilizada no enunciado e a trajetória do foguete, utilizando o GeoGebra. O objetivo das questões que coloquei, aos alunos, durante a apresentação serviu para relembrar os conceitos estudados anteriormente e para lhes mostrar que na Matemática podemos, sempre, relacionar os temas lecionados com aquele que estamos a lecionar. E ao falar da altura máxima do foguete (máximo da função), dos zeros da função e da caracterização da trajetória do foguete (parábola – é uma secção cónica), tinha como objetivo iniciá-los no contacto com conceitos a serem trabalhados. Com os dois últimos diapositivos queria cativar e motivar os alunos para fazerem este tipo de representações no GeoGebra – um programa gratuito e em português que têm à sua disposição.

Na segunda parte da aula, os alunos exploraram a tarefa "As janelas quadradas". Nesta tarefa, esperava que os alunos já fossem capazes de representar algebricamente o problema apresentado em linguagem natural e que resolvessem uma equação (incompleta) do 2.º grau a uma incógnita, utilizando a noção de raiz quadrada. Com efeito, os alunos resolveram esta tarefa mais rapidamente que a anterior, sem mostrarem dificuldades em encontrar a raiz quadrada que era solução da equação, talvez por estarem familiarizados com o conceito. No entanto, não houve tempo para realizar a discussão final, a aula terminou com a apresentação da estratégia de resolução de um aluno, no quadro. Foram ainda distribuídos os trabalhos para casa as Tarefas 4 e 7 e recolhidas as resoluções das tarefas desta aula.

3 de Maio de 2013 (45 minutos)

Sendo uma aula de apenas quarenta e cinco minutos, planeei concluir a discussão da tarefa da aula anterior e propor aos alunos uma nova tarefa "Mais desafios – I" de resolução de exercícios.

Durante a discussão da tarefa 6, voltei a projetar (Diapositivo 1 do *Power Point* utilizado na 5.ª aula, Anexo 1) a resolução apresentada pelo aluno, no final da aula anterior. O objetivo dessa projeção era mostrar aos alunos que $(-0{,}5)^2$ também era solução da equação, embora não fosse solução do problema, levando-os a compreender a diferença entre solução da equação e solução do problema. Depois fiz uma síntese do que foi abordado nas aulas anteriores e projetei no quadro (Diapositivo 2 do Power Point utilizado na 5.ª aula, Anexo 1) a definição de equação do 2.º grau a uma incógnita, que os alunos registaram no caderno.

Na segunda parte da aula os alunos realizaram a tarefa "Mais desafios - I" constituída por dois problemas que tinham como objetivo a consolidação de conhecimentos relativos à: conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica; resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita (utilizando a lei do anulamento do produto, a decomposição em fatores, os casos notáveis da multiplicação de binómios e/ou a noção de raiz quadrada) e compreensão da diferença entre solução da equação e solução da tarefa. Não houve tempo para discutir a tarefa na sua totalidade, pelo que optei por ser eu a registar no quadro, embora em interação com os alunos, a resolução do primeiro problema. Depois recolhi as resoluções dos alunos que foram entregues, posteriormente, corrigidas e com feedback para melhoria.

6 de Maio de 2013 (90 minutos)

Esta aula é o culminar de todo o trabalho feito os longo das aulas anteriores. As tarefas desta aula "Mais desafios – II" (Tarefa 9, Anexo 2) e "Mais desafios - III" (Tarefa 10, Anexo 2), eram bastante exigentes, principalmente a primeira porque além da conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica, exigia a resolução de uma equação completa do 2.º grau a uma incógnita, através da factorização de polinómios e da lei do anulamento do produto. Este aspeto revelou-se difícil para os alunos mas na discussão final da tarefa, um aluno foi ao quadro explicar a sua estratégia de resolução (que era a mais simples e intuitiva entre as resoluções que surgiram na turma) e todos perceberam. O que faltou na discussão, desta tarefa, foi o facto de não ter questionado a turma para a existência de mais soluções (apesar de não existirem), no entanto, explorei o caso da equação do 2.º grau completa não ser um quadrado perfeito.

Os alunos não revelaram grandes dificuldades na realização da tarefa seguinte mas demoraram mais que o esperado, pois estivam bastante agitados durante toda a aula, notando-se alguma falta de concentração e lentidão na sua resolução. Por isso, decidi que seria eu a resolvê-la no quadro, com a ajuda dos alunos, de modo a conseguir discuti-la antes de a aula terminar.

No final da aula, registei no quadro as tarefas a realizar como TPC. O objetivo destas tarefas era a consolidação de conhecimentos relativos à conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica e à resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, utilizando a lei do anulamento do produto. Os problemas eram semelhantes aos que fizemos nas aulas anteriores, porque os alunos precisam de ganhar destreza matemática na resolução de problemas, pois o exame de 9.º ano contém bastantes.

9 de Maio de 2013 (90 minutos)

Depois de distribuída a tarefa "Cubos e pirâmides quadrangulares" (Tarefa 11, Anexo 2) foi feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir a existência de alguma dúvida na linguagem do enunciado, nomeadamente, o significado de "decompor em seis pirâmides quadrangulares regulares e iguais", "analiticamente" e de seguida, foi explicado aos alunos que o objetivo da tarefa era mostrar que a aresta do cubo é igual ao dobro da altura das pirâmides.

Após a leitura e esclarecimento do enunciado, mostrei na turma um cubo de madeira e questionei os alunos: "Será que este cubo tem mesmo seis pirâmides quadrangulares regulares e iguais?". Todos disseram que um cubo se decompunha em quatro pirâmides quadrangulares regulares, à exceção de um aluno que rapidamente disse que se decompunha em seis pirâmides, revelando dificuldades na visualização espacial. De seguida, mostrei, com o auxílio do material manipulável, que um cubo se decompunha em seis pirâmides, o que se veio a revelar fundamental para a compreensão da tarefa.

Ainda mostrei uma sétima pirâmide para os alunos visualizarem que de facto, a altura da pirâmide é metade da aresta do cubo (ou, de forma análoga, que a aresta do cubo é igual ao dobro da altura das pirâmides). De seguida escrevi no quadro, com o auxílio dos alunos, o que teriam de provar $[a = 2 \times h]$.

A turma, no geral, esteva muito empenhada na resolução desta tarefa. E apesar da demonstração algébrica desta tarefa ser bastante complexa e exigente – consiste em resolver uma equação do 3.º grau com duas incógnitas – a turma superou as minhas expectativas e é com muita satisfação, que digo, que toda a turma resolveu corretamente esta tarefa.

Durante a discussão final, uma aluna foi ao quadro explicar o seu raciocínio e toda a turma percebeu a sua demostração. Salientei o facto de outra colega ter partido de uma forma diferente, mas conseguiu demostrar o pedido na tarefa.

Nesta aula, os alunos ainda resolveram a tarefa "Azulejos quadrados" (Tarefa 12, Anexo 2). Durante a realização desta tarefa, os alunos evidenciaram muitas dificuldades na compreensão do enunciado, o que os impediu de avançar, autonomamente, na sua resolução. Decidi, por isso, resolver esta tarefa em grupo, com toda a turma.

Para finalizar a aula, registei no quadro o TPC para a próxima aula, recolhi as tarefas realizadas e distribuí as tarefas corrigidas da anterior. O objetivo deste TPC foi preparar os alunos para o teste que iriam realizar. Neste sentido, as tarefas selecionadas do manual dos alunos incluíam questões de escolha múltipla, de resposta curta e problemas, sobre os tópicos abordados na unidade de ensino lecionada (Sequencias e regularidades. Equações), permitindo aos alunos fazer um balanço entre o estado das aprendizagens reais e aquilo que era esperado – realizando autoavaliação e desenvolvendo a autonomia e a confiança matemática.

Capítulo 4

Métodos de recolha de dados

Os instrumentos de recolha de dados tornam-se indispensáveis para a realização de um trabalho de natureza investigativa e devem ter em conta os seus objetivos. Desta forma, é necessário começar por fazer opções entre os diferentes métodos de recolha de dados, e consequentemente a construção dos instrumentos que sejam adequados.

Além disso e, pelo facto de este estudo ser de carácter investigativo é necessário e crucial não confundir o meu duplo papel – professora da turma e investigadora. Sendo a minha preocupação principal a aprendizagem dos alunos, não posso comprometer o meu papel enquanto professora na sala de aula. Este duplo papel exige-me uma enorme capacidade de reflexão e análise, ou seja, este meu pensamento fundamenta-se naquilo que Perrenoud (1999) assinala como prática reflexiva:

> (…) um profissional reflexivo aceita fazer parte do problema. Reflete sobre sua própria relação com o saber, com as pessoas, o poder, as instituições, as tecnologias, o tempo que passa, a cooperação, tanto quanto sobre o modo de superar as limitações ou de tornar seus gestos técnicos mais eficazes. Enfim, uma prática reflexiva metódica inscreve-se no tempo de trabalho, como uma rotina. Não uma rotina sonífera; uma rotina paradoxal, um estado de alerta permanente. Por isso, ela tem necessidade de disciplina e de método para observar, memorizar, escrever, analisar após compreender, escolher opções novas. (Perrenoud, 1999, in Campos, 2010, p. 42)

Este tipo de prática reflexiva deve ser constante e atualizada persistentemente perante reflexões anteriores. Esta atitude é primordial para exercer o duplo papel de professor e investigador, mas não se basta sozinha.

A utilização de vários instrumentos possibilita um confronto dos dados obtidos a partir de diversas fontes e informantes, o que torna o estudo mais fiável e diminui a possibilidade do investigador distorcer a imagem da realidade que está a investigar (Cohen, Manion & Morrison, 2000). Tendo em conta a limitação resultante da falta de autorização da escola para realizar entrevistas aos alunos ou gravações áudio e/ou vídeo das aulas, optei pela (i) recolha documental, focada nas resoluções escritas dos alunos da turma, das tarefas propostas ao longo das aulas, sendo uma delas de carácter avaliativo, e (ii) observação participante, com registo em notas de campo.

Ao longo deste capítulo são apresentada as opções metodológicas usadas no presente estudo, assim como, os instrumentos utilizados para recolha de dados e a sua análise.

4.1 Recolha documental

Neste estudo optei por recorrer à recolha documental uma vez que, de acordo com Guba e Lincoln (1981), a recolha documental é uma fonte de informação estável, constituindo uma base de fundamentação de outros dados.

Lüdke e André (2005, p. 39) acrescentam que os documentos constituem "uma fonte poderosa de onde podem ser retiradas evidências que fundamentam afirmações e declarações do pesquisador".

A recolha documental, neste estudo, diz respeito às produções escritas dos alunos nas tarefas propostas, permitindo-me analisar as diferentes estratégias e representações que utilizam, os erros e dificuldades comuns e a forma como os alunos mobilizam os conhecimentos anteriores para resolverem tarefas envolvendo equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita.

A recolha documental foi realizada após cada tarefa realizada, em sala de aula, durante a minha lecionação. No final de cada tarefa recolhi os registos do trabalho realizado pelos alunos, digitalizava-os e, posteriormente, os documentos originais eram analisados e comentados, por mim, para na aula seguinte, serem devolvidos aos alunos e o trabalho de estudo prosseguir. O teste de avaliação realizado pelos alunos após a minha lecionação, também, foi considerado nesta recolha de dados.

Deste modo, foi possível manter a originalidade das respostas escritas dos alunos, salvaguardando a interpretação dos dados, onde a "palavra escrita assume particular importância na abordagem qualitativa, tanto para o registo dos dados como para a disseminação dos resultados" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49).

Deste modo e para evitar que os alunos, envolvidos neste estudo, apagassem os seus raciocínios quando estavam errados e/ou os corrigissem, pedi-lhes que resolvessem as tarefas a caneta e, somente durante a discussão em grande-grupo, escrevessem as resoluções corretas e completas (discutidas e escritas no quadro) nos seus cadernos diários – apesar de não ser prática frequente para estes alunos foi interiorizado rapidamente.

4.2 Observação

Segundo Lüdke e André (2005), a observação participante é uma ferramenta de trabalho que permite obter informação normalmente inacessível através de outras técnicas, assim como, refere Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1994), este método é adequado ao investigador que pretende compreender o meio social que, à partida lhe é desconhecido, e que "lhe vai permitir integrar-se progressivamente nas atividades das pessoas que nele vivem" (p. 155).

Como é referido em Evalsed (2009), a observação participante implica o envolvimento do investigador na população ou na sua organização ou comunidade, de modo a, registar comportamentos, interações ou acontecimentos, podendo desta forma envolver-se nas atividades que está a estudar.

Neste estudo utilizou-se a observação participante no trabalho realizado durante a minha lecionação, pois fui circulando pela sala, observando os processos utilizados, as estratégias e as dificuldades com que se deparavam os alunos na realização das tarefas, por mim propostas, além de esclarecer eventuais dúvidas.

Apesar de ter tentando, ao máximo, registar de forma sistemática os episódios observados em aula, foi muito complicado uma vez que não tinha somente essa função. Estava focada no decorrer propriamente dito da aula, o que me levou a solicitar o apoio da minha colega de estágio, como referi anteriormente, para tirar alguns apontamentos sobre as intervenções dos alunos, tanto no trabalho autónomo, como nas discussões em grande grupo.

Solicitei a colaboração da minha colega de estágio, no sentido de assistir às aulas que lecionei, de forma a, registar os aspetos mais interessantes tendo em conta os objetivos e questões deste estudo, sendo que foi previamente informada sobre como fazer esse registo (o que registar, como, quem e para quê). Em algumas aulas pedi-lhe que estivesse com especial atenção aos diálogos dos alunos, quando resolviam as tarefas propostas, nas quais poderia ter sido vantajoso efetuar a recolha áudio e/ou vídeo desses momentos de trabalho.

Acontece que no decorrer das aulas, o papel de professora prevalece sobre o de investigadora. Esta dualidade de papéis faz com que não seja possível, no próprio momento, produzir anotações constantes e descritivas de ocorrências e situações relevantes. Bogdan e Biklen (1994) compartilham da mesma opinião salientando que "a tentativa de equilíbrio entre a participação e a observação pode também surgir como particularmente difícil" (p. 127).

Como complemento à observação, ao longo das aulas que lecionei, registei algumas notas que considerei pertinentes, de forma mais fiel e detalhada que me foi possível no momento, que mais tarde facilitou a análise. Quando se recorre a este tipo de recolha de dados, "onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, em como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo. (…) o mais importante não é recolher muitos dados, mas recolher dados adequados ao fim que se tem em vista e que sejam merecedores de confiança" (Ponte, 2002, p. 18).

Uma forma de ultrapassar a dificuldade, de desempenhar corretamente o duplo papel: professora e investigadora, pode apoiar-se nos "relatos escritos daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150), no final de cada lecionação. Estes autores defendem, também, que essas notas de campo devem ser detalhadas e precisas.

Por outro lado, este meu duplo papel permite uma observação persistente e um maior envolvimento com os participantes.

> Os professores, ao agirem como investigadores, não só desempenham os seus deveres mas também se observam a si próprios, dão um passo atrás e distanciam-se dos conflitos imediatos, tornam-se capazes de ganhar uma visão mais ampla do que se está a passar. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 286)

Deste modo, no final de cada aula, procurei recordar e descrever os momentos mais marcantes da aula para responder às questões deste estudo, optei também, por introduzir alguns comentários sobre algumas situações marcantes, assim como, refleti sobre a minha própria prática de ensino, criando assim, uma identidade entre a investigadora e a professora.

Capítulo 5

Apresentação e Análise de dados

Neste capítulo procuro apresentar e analisar globalmente os dados referentes ao desempenho dos alunos participantes neste estudo na realização das tarefas propostas ao longo das treze aulas em que decorreu a unidade de ensino. Na resolução destas tarefas os alunos trabalharam autonomamente em pares, tendo ocorrido um período de discussão geral, alargada ao grupo-turma, no seu final. Esta análise foca, essencialmente, os aspetos considerados mais relevantes para responder às questões do estudo. Assim, procurei analisar o modo como os alunos interpretam os enunciados das tarefas propostas e as diferentes estratégias que utilizam na resolução de equações do 2.º grau, bem como as principais dificuldades que evidenciam e os conhecimentos que mobilizam.

Os diálogos apresentados neste capítulo não correspondem a transcrições, uma vez que não me foi permitido o uso, nas aulas, de qualquer equipamento de áudio ou vídeo. Recorri, por isso, às notas de campo, onde registei diariamente, procurando ser o mais fidedigna possível, os episódios mais marcantes do trabalho realizado em sala de aula com os alunos.

5.1 Tarefa 1 – *Quem tem razão?*

A primeira tarefa, realizada a 4 de Março, a meio do tópico "Sólidos geométricos", tem carácter exploratório. O seu objetivo foi proporcionar aos alunos uma primeira abordagem às equações do 2.º grau, levando-os a fazer conexões com o tópico que estavam a trabalhar.

Nesta tarefa, os alunos tinham que interpretar o seu enunciado e traduzi-lo numa expressão algébrica. Este processo era facilitado pela figura que acompanhava o enunciado.

Na primeira alínea, uma grande parte dos alunos apresentou dificuldades na interpretação do enunciado e na sua tradução para a linguagem algébrica, nomeadamente, na escrita de "o comprimento de cada mosaico é 1,25 vezes maior do que a largura", porque não consideram a utilização de letras como incógnitas. Esta dificuldade foi ultrapassada através da discussão em grande-grupo onde os alunos concluíram que teriam de utilizar letras como incógnitas, nas suas expressões. Neste sentido, os alunos selecionaram a letra *c* e a letra *l* para representar, respetivamente, o comprimento e a largura na expressão algébrica que traduz a parte do enunciado acima descrita, como mostra a figura 5.1.

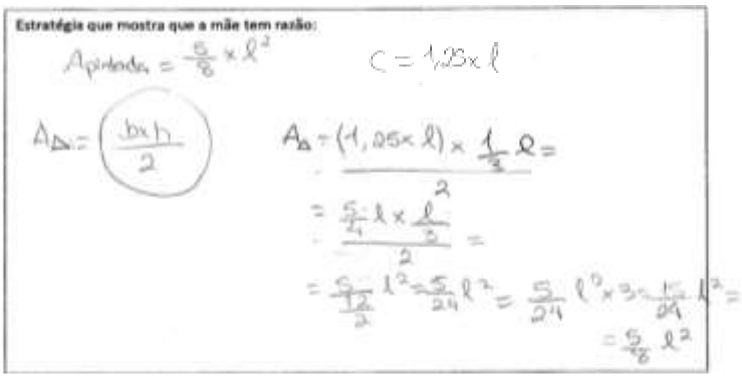
$$C = 1,25 \times l$$

Figura 5.1 – Representação algébrica do enunciado, após a discussão.

Depois dos alunos identificarem corretamente a relação entre c e l deverão mostrar que a área da parte pintada do mosaico da figura apresentada no enunciado é $\frac{5}{8}l^2$ e, deste modo, apresentar argumentos para a justificar. Os alunos resolveram a primeira alínea de maneiras diferentes, embora todas elas corretas.

Todos os alunos da turma mostram, algebricamente, a relação pretendida, recorrendo a uma estratégia de decomposição da parte pintada do mosaico. A maioria decompõe a figura em triângulos e apenas três alunos a decompõem em losangos.

Na estratégia de resolução que utiliza a decomposição em triângulos, foram identificadas duas resoluções diferentes (Figuras 5.2.a e 5.3.a) tendo por base o tipo de triângulo considerado (Figuras 5.2.b e 5.3.b). Na resolução apresentada na figura 5.2.a, que tem por base a decomposição exemplificada na figura 5.2.b, o aluno utiliza incorretamente um símbolo de igual – na passagem de $\frac{5}{24}l^2$ para $\frac{5}{24}l^2 \times 3$ – mas chega ao resultado correto. Salienta-se, também, que os alunos recorreram às propriedades do losango, já estudadas no ano letivo anterior, para obter a altura e a base do triângulo considerado.


Estratégia que mostra que a mãe tem razão:

$A_{pintada} = \frac{5}{8} \times l^2$ $\quad C = 1,25 \times l$

$A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$

$A_{\Delta} = \frac{(1,25 \times l) \times \frac{1}{3} l}{2} = \frac{\frac{5}{4} l \times \frac{l}{3}}{2} = \frac{\frac{5}{12}}{2} l^2 = \frac{5}{24} l^2 = \frac{5}{24} l^2 \times 3 = \frac{15}{24} l^2 = \frac{5}{8} l^2$

Figura 5.2.a – Resolução da alínea a, que mostra que a mãe tem razão.

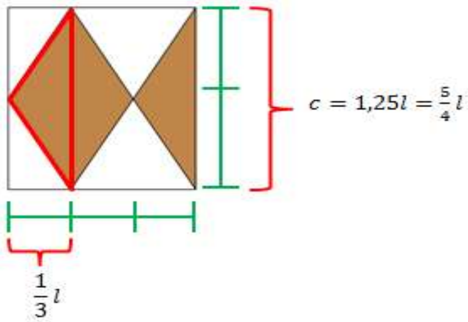


Figura 5.2.b – Decomposição utilizada na estratégia da figura 5.2.a.

A resolução que se segue tem por base a decomposição exemplificada na figura 5.3.b. O aluno chega à relação correta mas, a partir da terceira linha, usa incorretamente o símbolo de equivalência, porque deixa de ter uma equação, uma vez que opta por desenvolver apenas o segundo membro:

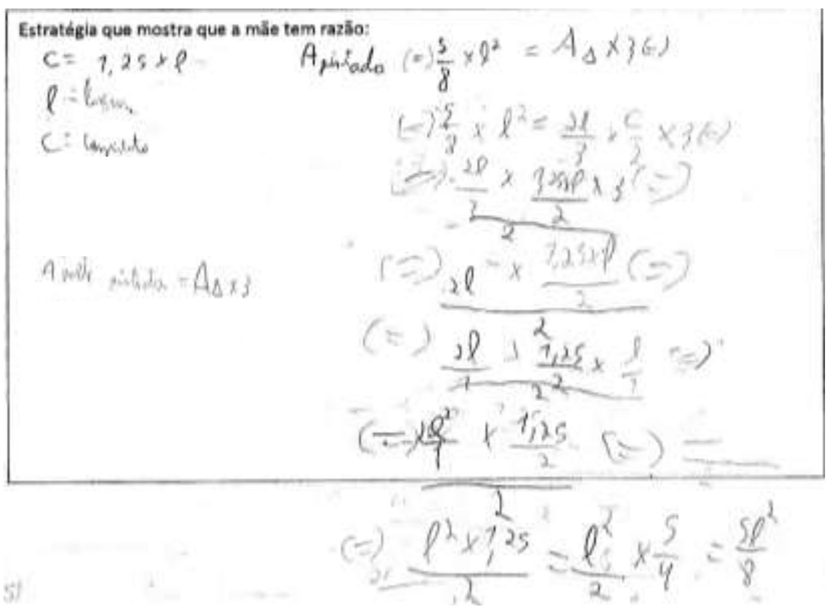


Figura 5.3.a – Resolução da alínea a, que mostra que a mãe tem razão.

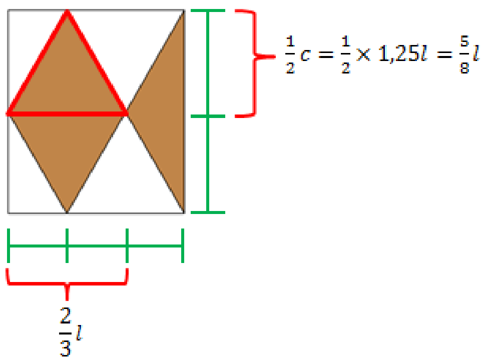


Figura 5.3.b – Decomposição utilizada na estratégia da figura 5.3.a.

A próxima resolução (Figura 5.4) exemplifica o trabalho dos alunos que utilizam a decomposição em losangos, para obter o valor correto da área da parte pintada da figura.

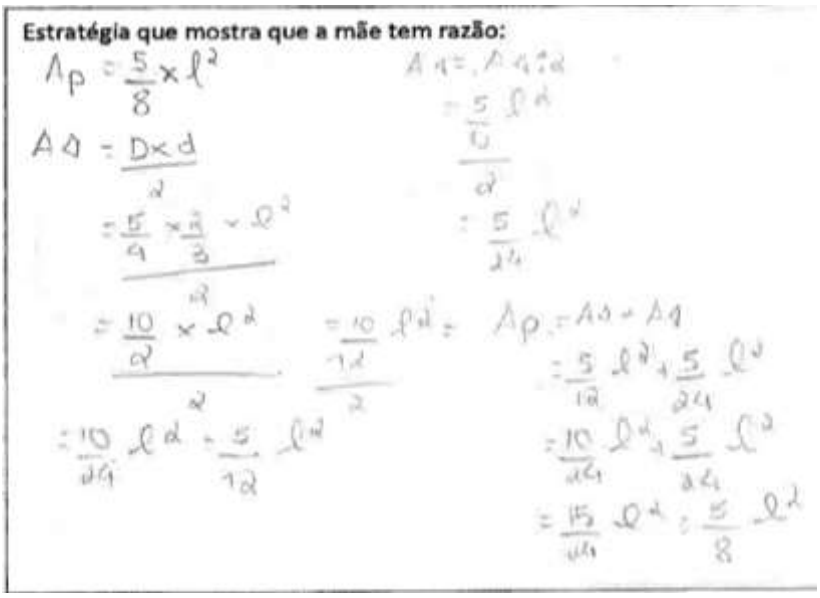


Figura 5.4 – Resolução da alínea a, que mostra que a mãe tem razão.

Ainda nesta alínea, os alunos foram solicitados a mostrar que a área da parte pintada da figura pode ser dada através de uma outra expressão equivalente. Neste caso, os alunos utilizam dois tipos de argumentos: algébricos e geométricos, sendo que, aproximadamente, metade da turma opta por cada um deles. A título exemplificativo, apresento, nas figuras 5.5 e 5.6, os dois tipos de resoluções corretas que surgiram na turma.

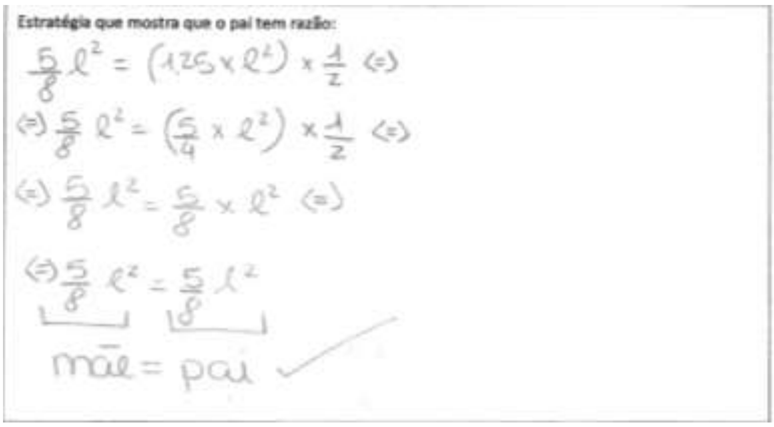


Figura 5.5 – Resolução algébrica da alínea a, que mostra que o pai tem razão.

Nesta resolução (Figura 5.5) o aluno utiliza a expressão $\frac{5}{8}l^2$ que já tinha encontrado anteriormente e mostra algebricamente que essa expressão é igual à área de metade do mosaico. Na resolução seguinte (Figura 5.6), o aluno recorre aos critérios de congruência de triângulos, estudados no ano letivo anterior, para mostrar a igualdade entre expressões.

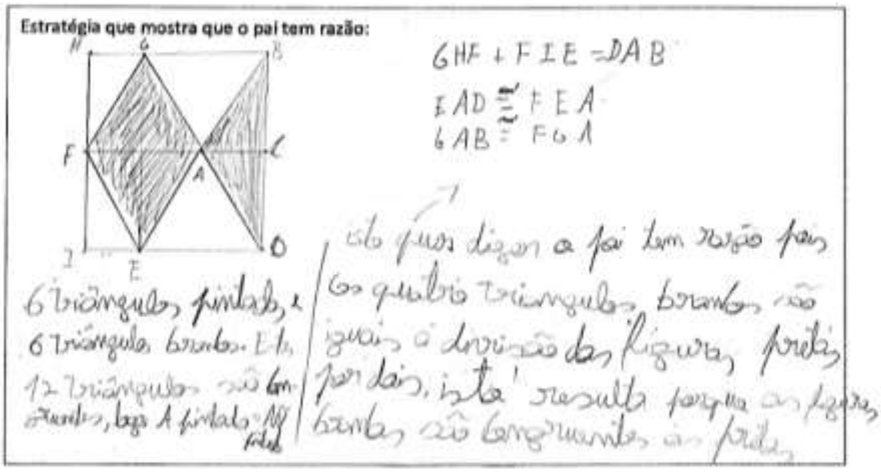


Figura 5.6 – Resolução geométrica da alínea a, que mostra que o pai tem razão.

Na última alínea desta tarefa, os alunos precisaram de encontrar a medida da largura do mosaico, conhecendo a área da parte pintada do mosaico. Para isso, confrontaram-se com a necessidade de resolver uma equação do 2.º grau incompleta, utilizando a noção de raiz quadrada. Todos os alunos da turma começam por traduzir, corretamente, a linguagem natural do enunciado para linguagem algébrica e, sem dificuldades, resolvem-na algebricamente. As duas resoluções seguintes mostram que os alunos recorreram aos resultados obtidos anteriormente. Na primeira resolução, que apresento na figura 5.7, o aluno obtém o valor para a largura do mosaico através da área pintada, enquanto, na segunda resolução, figura 5.8, o aluno obtém o valor para a largura do mosaico através da área total do mosaico.

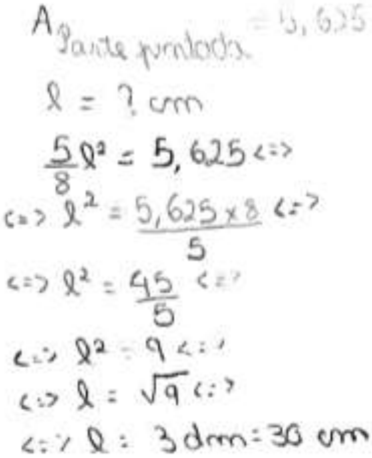
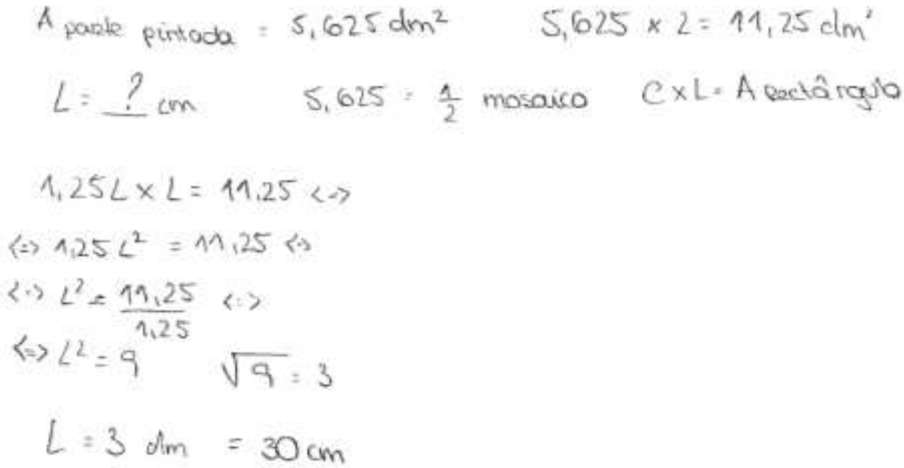


Figura 5.7 – Resolução da alínea b, através da área pintada do mosaico.


A parte pintada = 5,625 dm² 5,625 × 2 = 11,25 dm²

L = ? cm 5,625 = $\frac{1}{2}$ mosaico C × L = A rectângulo

$1,25L \times L = 11,25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1,25L^2 = 11,25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L^2 = \frac{11,25}{1,25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L^2 = 9$ $\sqrt{9} = 3$

L = 3 dm = 30 cm

Figura 5.8 – Resolução da alínea b, através da área total do mosaico.

Apesar dos alunos não evidenciarem dificuldades na resolução, cometeram um erro bastante comum, o de não considerarem a raiz negativa como solução da equação, apesar da solução do problema ser apenas o valor positivo dessa raiz. Contudo, durante a discussão desta tarefa, os alunos, revelaram que não se aperceberam da existência da raiz negativa enquanto resolviam a equação.

5.2 Tarefa 2 – *A vedação do terreno*

A segunda tarefa foi realizada na aula de 4 de Abril, um mês após a realização da primeira tarefa. Esta tarefa, composta por um problema, permitiu uma primeira abordagem ao estudo do capítulo "Sequências e regularidades. Equações", tendo como objetivo fazer um diagnóstico acerca dos conhecimentos dos alunos relativos à conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica, às operações com polinómios, à adição e multiplicação algébrica, assim como, à resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, ainda que não formal, num contexto de problema.

Nesta tarefa, a maior parte dos alunos recorre a uma representação pictórica da informação disponível no enunciado e só depois passa para a escrita algébrica, como mostra o exemplo seguinte (Figura 5.9):

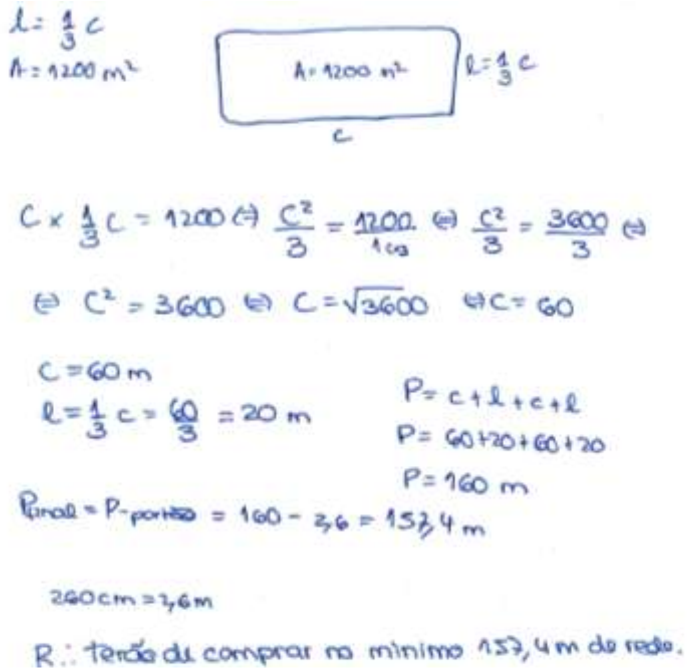


Figura 5.9 – Resolução da tarefa 2.

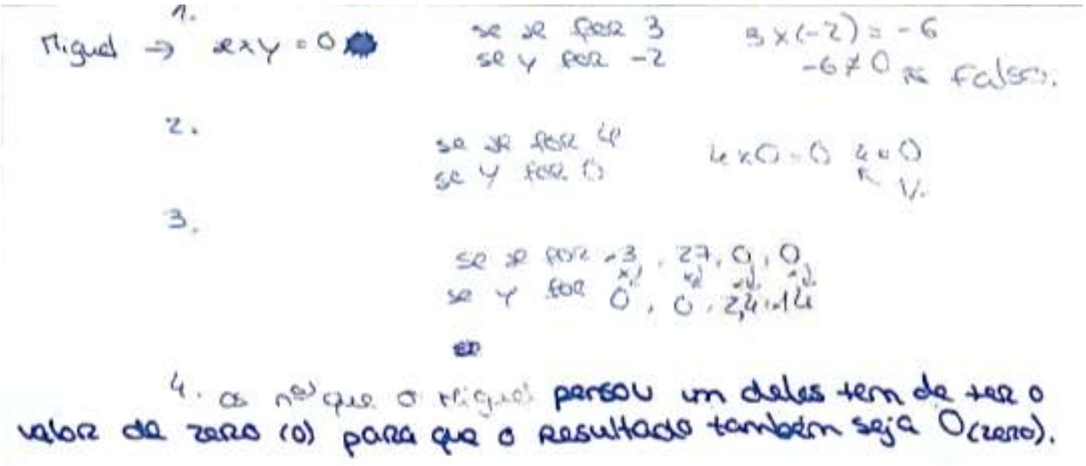
A representação pictórica no trabalho dos alunos facilitou-lhes a compreensão do enunciado e a estratégia de resolução a utilizar e também, a escrita da expressão algébrica que traduz o enunciado. Apenas dois alunos não finalizaram a sua resolução por falta de tempo.

Mais uma vez, e apesar de ter sido foco de discussão na tarefa anterior, os alunos não fazem referência à existência de duas soluções (positiva e negativa) para a equação $\frac{c^2}{3} = 1200$. Continuam, assim, a evidenciar não compreender a diferença entre solução da equação e solução do problema, mas, é visível a aplicação correta de outros conceitos estudados anteriormente, tais como, a área e perímetro de um retângulo, as reduções com medidas de comprimento e os princípios de equivalências das equações.

5.3 Tarefa 3 – *À descoberta de números…*

Esta tarefa foi proposta aos alunos a 29 de Abril, tendo como finalidade introduzir a lei do anulamento do produto, num contexto de resolução de problemas, como ferramenta para a resolução de equações do 2.º grau incompletas.

Os alunos não apresentam dificuldades na interpretação e resolução das primeiras quatro questões. É de evidenciar que toda a turma resolveu corretamente estas quatro questões mas apenas um aluno sentiu a necessidade de escrever uma equação para traduzir o enunciado: “Pensei em dois números. Multipliquei-os. Obtive o valor zero”. Apresento a resolução deste aluno (Figura 5.10) e uma outra resolução (Figura 5.11) que exemplifica as respostas dos restantes alunos.



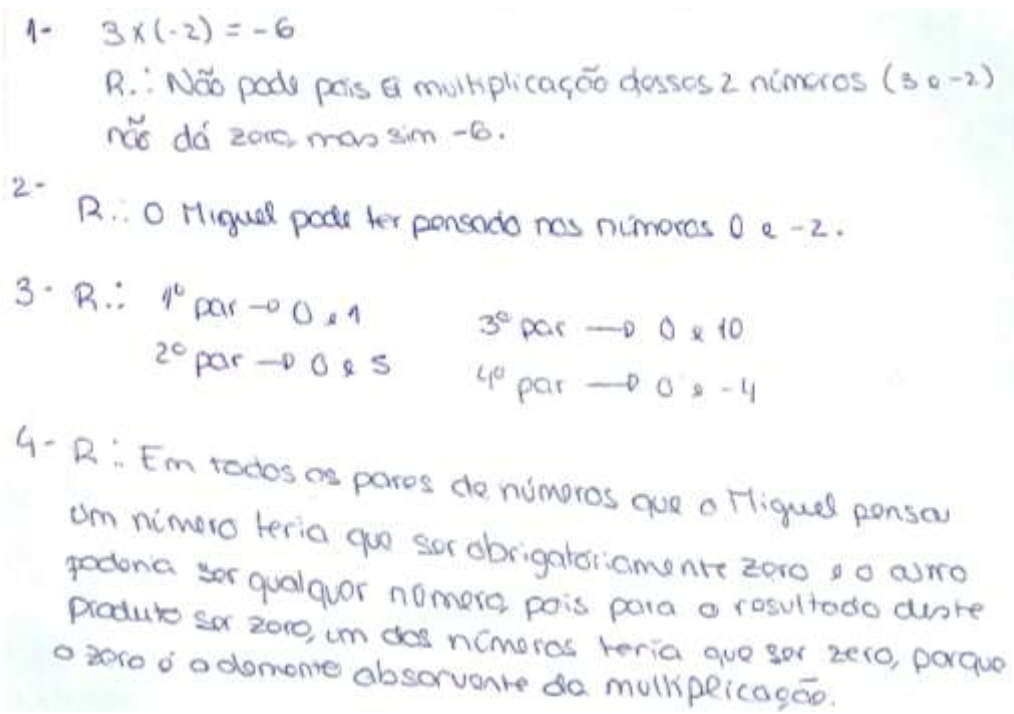
1\. Miguel → $x \times y = 0$ | se x for 3, se y for −2 | $3 \times (-2) = -6$, $-6 \neq 0$ ∴ Falso.

2\. se x for 4, se y for 0 | $4 \times 0 = 0$, $0 = 0$ ∴ V.

3\. se x for −3, 27, 0, 0 | se y for 0, 0, 2,4, 14

4\. os nºs que o Miguel pensou um deles tem de ser o valor de zero (0) para que o resultado também seja 0 (zero).

Figura 5.10 – Resolução da tarefa 3: questões 1, 2, 3 e 4, utilizando uma equação.



1- $3 \times (-2) = -6$
R.: Não pode pois a multiplicação desses 2 números (3 e −2) não dá zero, mas sim −6.

2- R.: O Miguel pode ter pensado nos números 0 e −2.

3- R.: 1º par → 0 e 1; 2º par → 0 e 5; 3º par → 0 e 10; 4º par → 0 e −4

4- R.: Em todos os pares de números que o Miguel pensou um número teria que ser obrigatoriamente zero e o outro poderia ser qualquer número pois para o resultado deste produto ser zero, um dos números teria que ser zero, porque o zero é o elemento absorvente da multiplicação.

Figura 5.11 – Resolução da tarefa 3: questões 1, 2, 3 e 4.

As figuras anteriores mostram que os alunos perceberam que um produto dá zero, quando, pelo menos um dos seus fatores é zero. É notório, também, que estes alunos compreenderam as propriedades da multiplicação, como por exemplo, o zero é o elemento absorvente da multiplicação.

Após a discussão, com o objetivo de sistematizar as ideias e antes de formalizar a lei do anulamento do produto, escrevi no quadro: "O que podemos concluir?" e os comentários não se fizeram esperar, mostrando as aprendizagens realizadas pelos alunos:

Aluno A: O produto dá sempre zero.
Professora: Concordam com o vosso colega?
Aluno B: Não professora, o produto só dá zero se uma das parcelas for zero.
Aluno C: Fator! Porque estamos a falar de uma multiplicação.
Professora: Então o que podemos concluir?
Aluno C: Um produto dá zero se um dos seus fatores for zero.
Professora: Mas porque é que um dos fatores tem de ser zero?
Aluno D: Porque zero é o elemento absorvente da multiplicação.

No problema seguinte, percebi que os alunos estavam a sentir dificuldades em traduzir o enunciado para a linguagem algébrica e, através de discussão em grande grupo, tentei ajudá-los a ultrapassar as dificuldades relacionadas com a utilização dos símbolos algébricos:

Professora: Turma, como se pode definir matematicamente o produto?
Vários alunos: Vezes.
Professora: O que é a diferença?
Vários alunos: É uma subtração.
Professora: O que queremos descobrir?
Vários alunos: O número que a Catarina pensou.
Aluno D: Então podemos chama-lo de x.
Professora: E como escrevemos matematicamente a palavra nulo?
Vários alunos: Zero.
Professora: Então já têm tudo para descobrir esse número. E mais não digo.

Após esta discussão, todos os alunos responderam corretamente à questão. A maioria resolveu aplicando a lei do anulamento do produto (Figura 5.12). Outros começaram por aplicar a propriedade distributiva mas aperceberam-se que não conseguiam resolver a equação desta forma e optaram por aplicar a lei do anulamento do produto (Figura 5.13). Finalmente, dois alunos aplicaram erradamente a diferença de quadrados (Figura 5.14), que tinham abordado nas aulas anteriores. Algumas respostas testemunham estes factos:

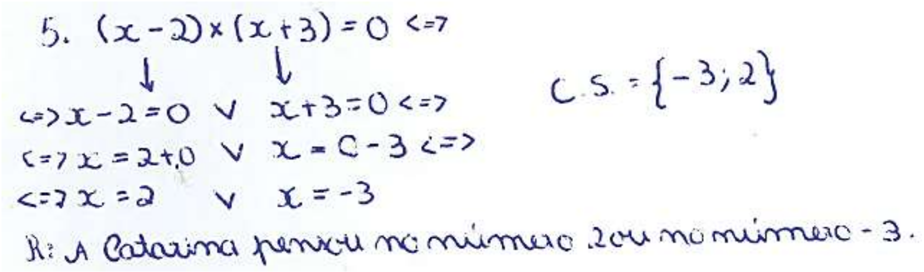


Figura 5.12 – Resolução da tarefa 3: questão 5.

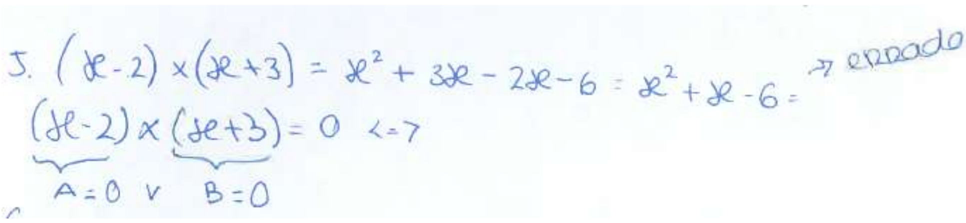


Figura 5.13 – Resolução da tarefa 3: questão 5.

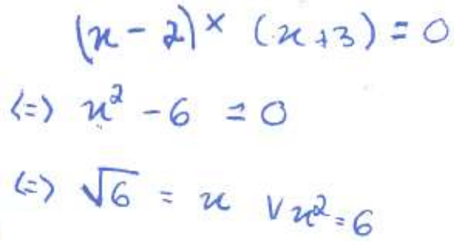


Figura 5.14 – Resolução da tarefa 3: questão 5.

As resoluções apresentadas nas figuras 5.13 e 5.14 foram discutidas em aula, contribuindo para levar os alunos a perceberem que ao aplicar a propriedade distributiva obtinham uma equação completa do 2.º grau, não tendo neste momento forma de a resolver e que não estavam perante uma diferença de quadrados.

Nem todos os alunos terminaram a última questão, por falta de tempo. Assim, apenas quatro dos quinze alunos que terminaram, resolveram corretamente a alínea *a* e cinco resolveram corretamente a alínea *b*. É interessante salientar, no entanto, que os quinze alunos traduziram corretamente o enunciado para linguagem algébrica e que as dificuldades e os erros surgiram na resolução da equação. A título exemplificativo, apresento, as dificuldades e erros que foram identificados, na resolução da equação da alínea *a* (Figuras 5.15 e 5.16):

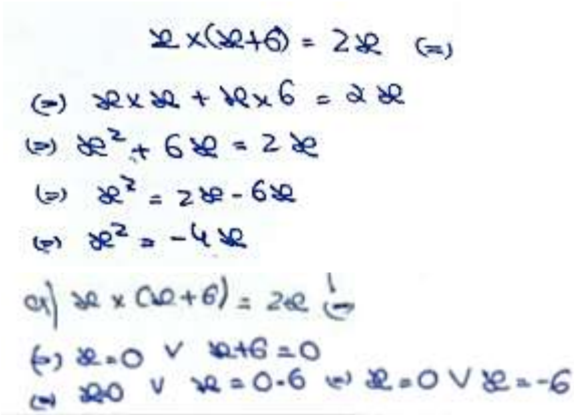


Figura 5.15 – Dificuldades e erros na resolução da tarefa 3: questão 6 alínea a.

Na resolução anterior, o aluno aplica corretamente a propriedade distributiva e os princípios de equivalência das equações, mas ao obter a equação $x^2 = -4x$ não consegue aplicar a lei do anulamento do produto e decide abandonar esta estratégia e começar de novo a resolução da equação inicial tentando aplicar a lei do anulamento do produto. Neste caso, o aluno ignora o $2x$ que está no 2.º membro e aplica-a incorretamente.

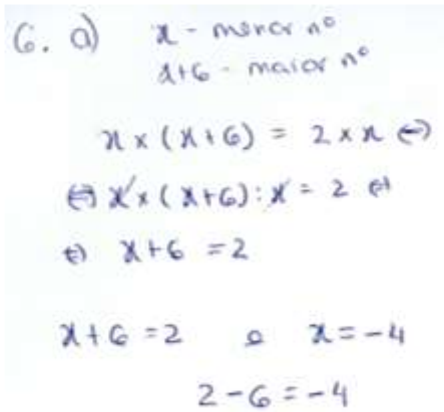


Figura 5.16 – Dificuldades e erros na resolução da tarefa 3: questão 6 alínea a.

Na resolução da figura 5.16, o aluno divide ambos os membros por x, mas esquece-se de incluir a condição $x = 0$ no conjunto solução da equação, obtendo apenas uma das soluções da equação. Tanto nesta resolução, como na anterior, os alunos não apresentam o conjunto-solução da equação nem a resposta ao problema.

Um aluno, cuja resolução se apresenta a seguir (Figura 5.17), equaciona corretamente o problema, resolve a equação utilizando a lei do anulamento do produto e obtém o seu o conjunto-solução, também de forma correta, mas não responde ao problema.

$$\text{⑥ A) } x \times (x+6) = 2x \Leftrightarrow x(x+6) - 2x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x(x+4)=0} \Leftrightarrow x(x+6-2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x+4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4 \quad C.S. = \{-4, 0\}$$

Figura 5.17 – Resolução incompleta na tarefa 3: questão 6 alínea a.

Apenas dois alunos conseguiram resolver corretamente toda a questão 6. Apresento, de seguida e a título exemplificativo, uma dessas resoluções (Figura 5.18). Este aluno aplica bem a lei do anulamento do produto e a diferença entre solução da equação e do problema, não se esquecendo das duas raízes da equação.

$$6.\ \text{a) } x \times (x+6) = 2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+6) - 2x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+6-2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x+4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 4$$

$$C.S. = \{-4, 0\}$$

Quando $x = 0 \rightarrow 0+6 = 6$

Quando $x = -4 \rightarrow -4+6 = 2$

R: O José pensou nos números 0 e 6 ou nos números −4 e 2.

$$\text{b) } 3x^2 - 75 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 \times x^2 = 75 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 75 \div 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{25} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } -5$$

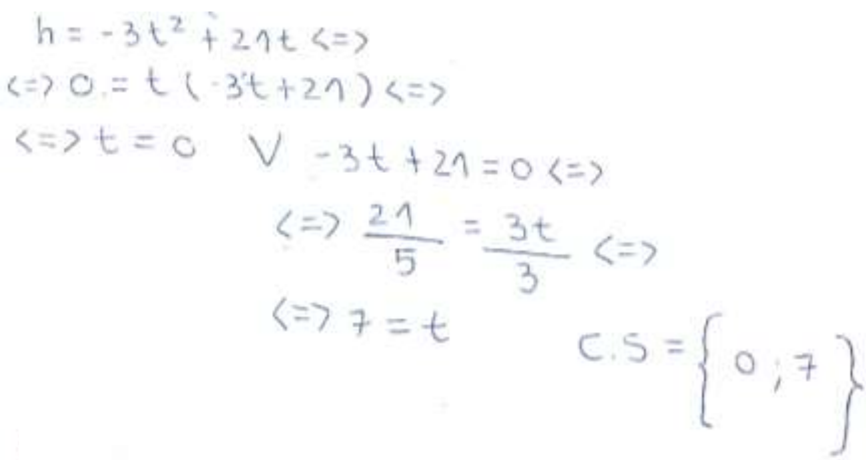
R: A Marta refere-se ao 5 ou ao −5.

Figura 5.18 – Resolução completa na tarefa 3: questão 6.

5.4 Tarefa 5 – *A queda do foguete*

A tarefa 5 foi realizada a 2 de Maio, na aula seguinte à tarefa anterior. Esta tarefa teve como objetivos: a interpretação do enunciado de um problema; a resolução de uma equação do 2.º grau com uma incógnita; a interpretação e avaliação das soluções da equação no contexto do problema. Além disso, pretendia recapitular a resolução algébrica da equação quadrática do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, revisitando e consolidando a factorização de polinómios, pelo processo de colocar fatores comuns em evidência, e a lei do anulamento do produto. A resolução gráfica das equações deste tipo e as suas conexões com a resolução algébrica foram também realçadas nesta tarefa, mas num contexto não formal.

De evidenciar que nem todos os alunos resolveram corretamente este problema. De facto, dez alunos que não completaram na totalidade as suas resoluções e quatro alunos resolveram erradamente o problema. Apesar destes quatro alunos se terem apercebido do seu engano, indicando-o na sua resolução, não conseguiram refazer as suas resoluções devido à falta de tempo. Apresento (Figura 5.19), a título exemplificativo, uma resolução incompleta.



$h = -3t^2 + 21t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = t(-3t + 21) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee -3t + 21 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{21}{5} = \frac{3t}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7 = t$ $\quad C.S = \{0; 7\}$

Figura 5.19 – Resolução incompleta e com alguns erros na tarefa 5.

O aluno comete alguns erros na utilização de notação simbólica, nomeadamente, na passagem da primeira para a segunda equação, porque não são equivalentes, apesar de compreender o que lhe era pedido no enunciado, substituindo o $h(t)$ por zero. Outro erro identificado nesta resolução assenta, no facto, do aluno continuar a usar o símbolo de equivalente enquanto desenvolve apenas uma das equações, omitindo a expressão $t = 0$ nas duas últimas linhas da sua resolução. No entanto, resolve corretamente a equação pelo processo de colocar fatores comuns em evidência, de modo a aplicar a lei do anulamento do produto e escreve o conjunto-solução da equação, também de maneira correta, mas não responde ao problema.

Nas duas resoluções completas que apresento em seguida (Figuras 5.20 e 5.21), ambos os alunos mostram compreender o processo de factorização, a lei do anulamento do produto e a diferença entre a solução da equação e a solução do problema.

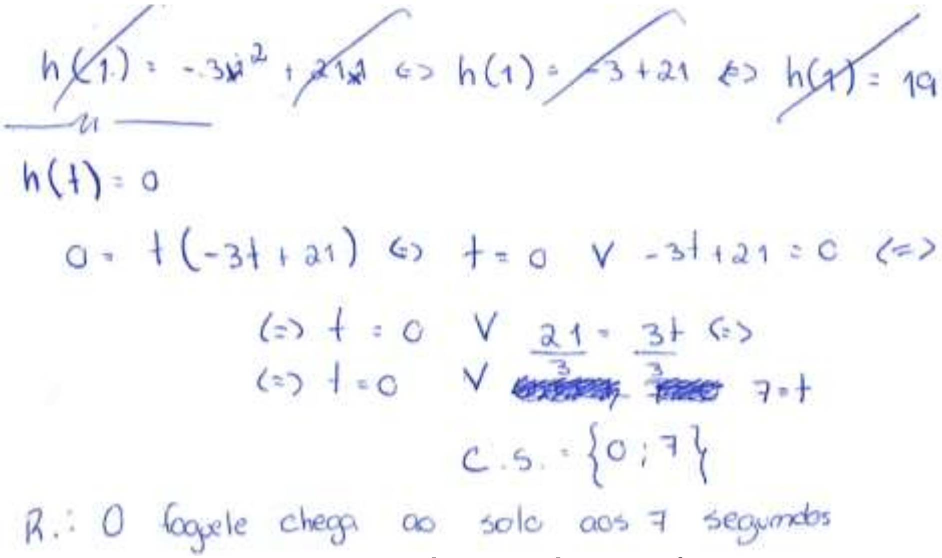


Figura 5.20 – Resolução completa na tarefa 5.

Nesta resolução o aluno começa por aplicar o método de tentativa e erro, resolvendo a equação para $t = 1$ mas acaba por abandonar esta estratégia e optando por aplicar a lei do anulamento do produto corretamente. O aluno, cuja resolução se apresenta a seguir (Figura 5.21), também começa por aplicar a lei do anulamento do produto erradamente, mas apercebe-se do erro e reformula a sua estratégia de resolução:

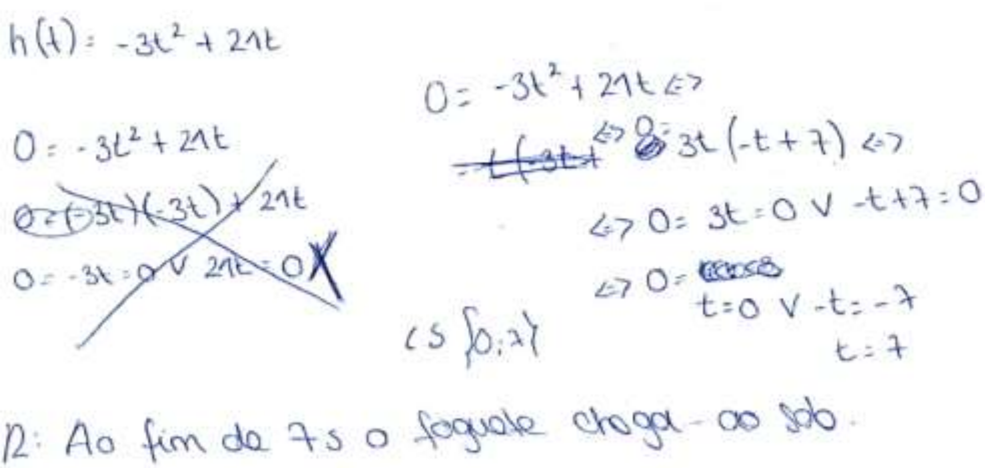


Figura 5.21 – Resolução completa na tarefa 5.

Nas figuras 5.22 e 5.23 apresento duas resoluções incorretas para este problema:

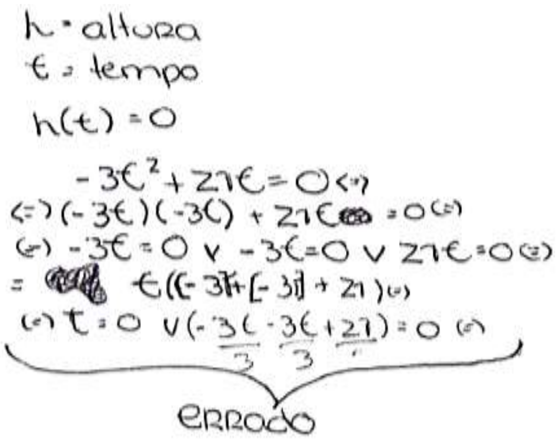


Figura 5.22 – Resolução incorreta na tarefa 5.

Nesta resolução, o aluno interpreta corretamente o problema e reconhece que o $h(t)$ tem de ser zero, mas comete erros na aplicação da lei do anulamento do produto para resolver a equação. Quando de apercebe que a sua resolução está errada já não tem tempo de a reformular. Ainda nesta resolução, são visíveis, algumas fragilidades no conceito de potência (conceito este estudado no ano letivo anterior), quando substitui $-3t^2$ por $(-3t)(-3t)$.

No exemplo seguinte (Figura 5.23), o aluno evidencia diversas dificuldades, atendendo às várias tentativas para resolver o problema e acaba por não ter tempo para o terminar. Este aluno começa por resolver a equação para $t = 0$ em vez da equação $h(t) = 0$, evidenciando dificuldades na interpretação do problema mas acaba por reconhecer que está errada. Faz uma segunda tentativa de resolução do problema, mas volta a cometer erros, agora na resolução da equação e no uso incorreto do sinal de igual. Por exemplo,

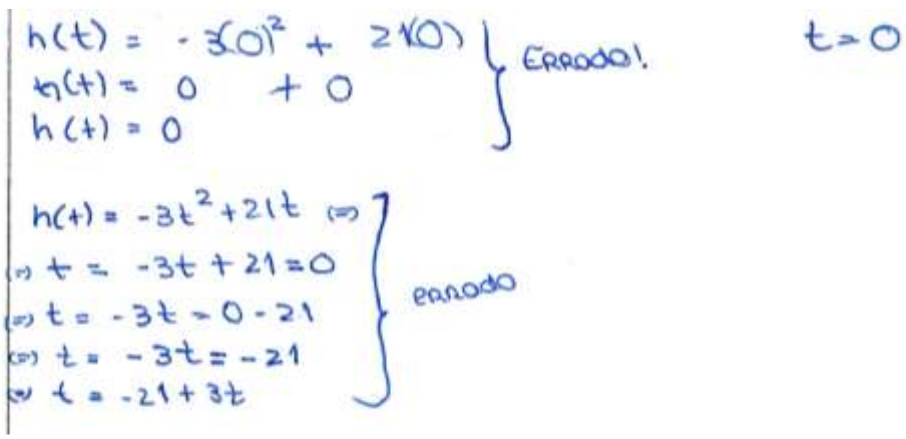


Figura 5.23 – Resolução incorreta na tarefa 5.

5.5 Tarefa 6 – *As janelas quadradas*

Ainda na mesma aula foi realizado o problema da tarefa 6, com o objetivo de trabalhar com os alunos a interpretação do enunciado de um problema, a conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica, a resolução de uma equação (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita envolvendo a noção de raiz quadrada e a interpretação das soluções da equação. Esta tarefa teve também como objetivo relembrar a resolução algébrica das equações quadráticas do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, ao mesmo tempo que possibilitou o estudo da resolução daquele tipo de equações numa perspetiva funcional.

Nem todos os alunos concluíram as suas resoluções no tempo disponibilizado, embora o trabalho que apresentam esteja correto (Figura 5.24).

$100\,m^2 = 1000000\ cm^2$

$$\begin{array}{ll} 100\,m^2 & \text{——}\ 400 \\ x & \text{——}\ 1 \end{array}$$

$x = \frac{100\,m^2 \times 1}{400}$

$x = \frac{100}{400}$

$x = \frac{1}{4} = 0{,}25\,m^2$

$0{,}25\,m^2 = 2500\,cm^2$

Figura 5.24 – Resolução incompleta na tarefa 6.

Esta resolução mostra que o aluno percebeu alguns dos conceitos matemáticos estudados anteriormente, tais como, a conversão de m^2 para cm^2 e a regra de três simples. É, também, visível que o aluno resolveu tudo corretamente até então, mas não termina a resolução do problema, possivelmente por falta de tempo.

Houve seis alunos que resolveram erradamente o problema e, alguns destes, aperceberam-se do seu engano, indicando-o na sua resolução, mas poucos foram os que conseguiram refazer as suas resoluções, talvez por falta de tempo (Figuras 5.25 e 5.26).

Nas duas primeiras linhas da resolução da figura 5.25, verifica-se que o aluno percebe a primeira parte do enunciado do problema, pelo facto de dividir os $100m^2$

pelos 400 quadrados de vidro, para saber a área de cada vidro quadrado. Após obter a área de cada vidro quadrado, o aluno, divide esse valor por dois e, para além disto, o quociente dessa divisão passa, erradamente, a metros. No entanto, o aluno afirma já ter percebido o seu erro.

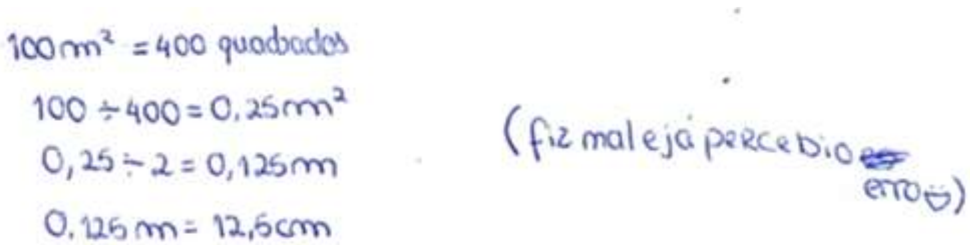


Figura 5.25 – Resolução incorreta na tarefa 6.

O aluno, cuja resolução se apresenta a seguir (Figura 5.26), inicia a resolução do problema corretamente, começando por converter os $100m^2$ para $1000000cm^2$ e aplica a regra de três simples, escolhendo letra x como sendo a incógnita.

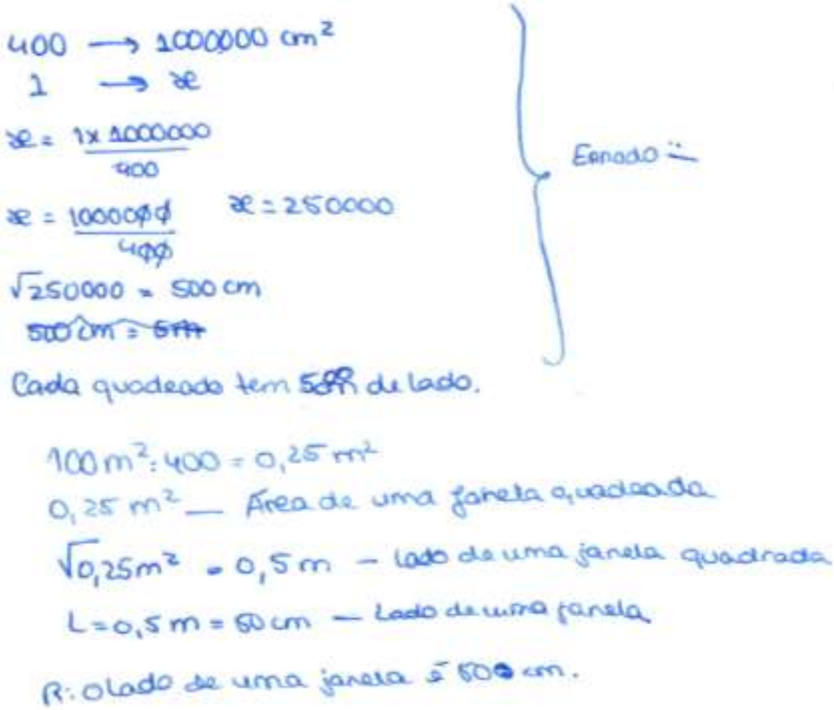


Figura 5.26 – Resolução com alguns erros na tarefa 6.

Este aluno calcula, erradamente, a divisão de 10000 por 4, mas sabe que a sua fração inicial $\left(\frac{1000000}{400}\right)$ é equivalente à fração $\frac{10000}{4}$. O aluno mostra que interpretou o enunciado do problema corretamente, porque aplica a raiz quadrada – apesar de ter sido no valor errado – e até responde ao problema, mas comete um erro bastante comum, o de não considerar a raiz negativa como solução da equação – apesar da solução do problema ser apenas o valor positivo da raiz. No entanto, o aluno afirma já ter percebido o seu erro, nesta primeira parte da resolução e reformula a sua resolução. Ao analisar a segunda resolução (Figura 5.26), deste aluno, verifico que está tudo correto com a exceção da raiz negativa, que volta a não aparecer nesta resolução. Esta omissão foi, aliás, comum a todos os alunos pois nenhum considerou a raiz negativa como solução da equação, apesar da solução do problema ser apenas o valor positivo dessa raiz (Figuras 5.26 e 5.27).

A resolução seguinte (Figura 5.27) não está totalmente correta, porque mostra o mesmo erro da resolução anterior – o aluno não considera a raiz negativa como solução da equação. No entanto, este aluno utiliza a letra l como objeto, pois a letra é entendida como o nome de um objeto concreto. Neste caso, a área de um quadrado é l^2, onde l é o comprimento do lado do quadrado.

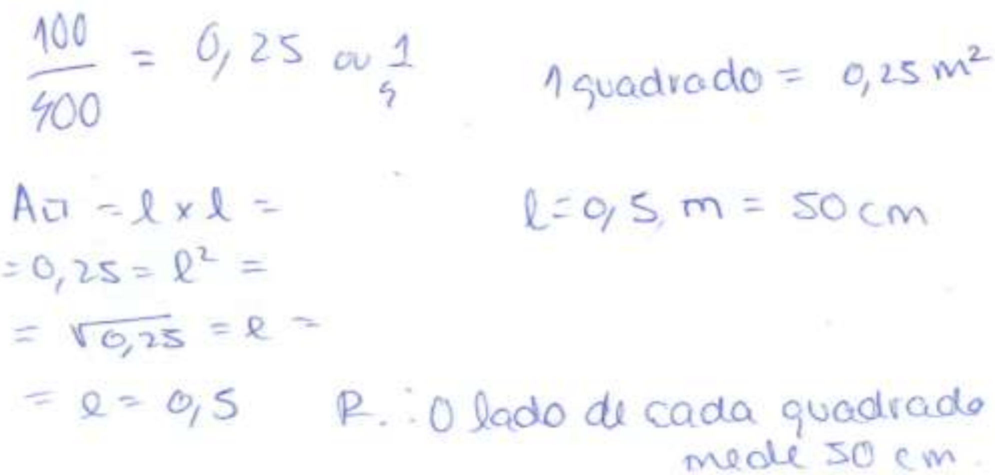


Figura 5.27 – Resolução incompleta na tarefa 6.

5.6 Tarefas 4 e 7 – *Aplico o que aprendi I e II*

Estas tarefas foram entregues aos alunos no final da aula de dia 2 de Maio para serem realizadas em trabalho extra letivo e incluíam um conjunto de exercícios para consolidação das aprendizagens relativas à resolução de equações do 2.º grau a uma incógnita, utilizando a lei do anulamento do produto, a decomposição em fatores e envolvendo a noção de raiz quadrada.

Dos alunos que entregaram as suas resoluções, a maioria resolve corretamente os exercidos propostos, mas ainda foram identificadas dificuldades na utilização correta da lei do anulamento do produto (Figura 5.28), como mostra o exemplo seguinte:

d) $3z^2 = 12z \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (3z)(3z) = 12z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3z = 12z \vee 3z = 12z$$

$$\Leftrightarrow \frac{3z}{3} = \frac{12z}{3} \vee \frac{3z}{3} = \frac{12z}{3}$$

$$\Leftrightarrow z = 4z \vee z = 4z$$

Figura 5.28 – Resolução incorreta na tarefa 4: questão 1 alínea d.

Nesta resolução, o aluno aplica mal a lei do anulamento do produto, ignorando o valor do 2.º membro da equação, apesar de ter realizado outros exercícios semelhantes, de forma correta. Além disso, o aluno revela fragilidades no conceito de potência quando substitui $3z^2$ por $(3z)(3z)$.

Os alunos também mostram dificuldades em reconhecer a existência de duas soluções (positiva e negativa) quando utilizam a noção de raiz quadrada. Na figura 5.29, o aluno não faz qualquer referência à raiz negativa para ambas as equações e também não apresenta o conjunto-solução. No entanto, utiliza corretamente os princípios de equivalência das equações.

h) $49 = x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{49} = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 = x$$

i) $x^2 = 0{,}01 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{0{,}01} = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}1 = x$$

Figura 5.29 – Resolução incompleta na tarefa 7: questão 1 alíneas h e i.

A próxima figura (5.30), mostra a diferença dos alunos na indicação do conjunto-solução. O aluno não deu importância ao enunciado e, apesar de ter resolvido corretamente todas as equações, não apresentou o respetivo conjunto-solução. Este aluno tem facilidade em resolver a equação com a incógnita em qualquer um dos membros, o que não é habitual.

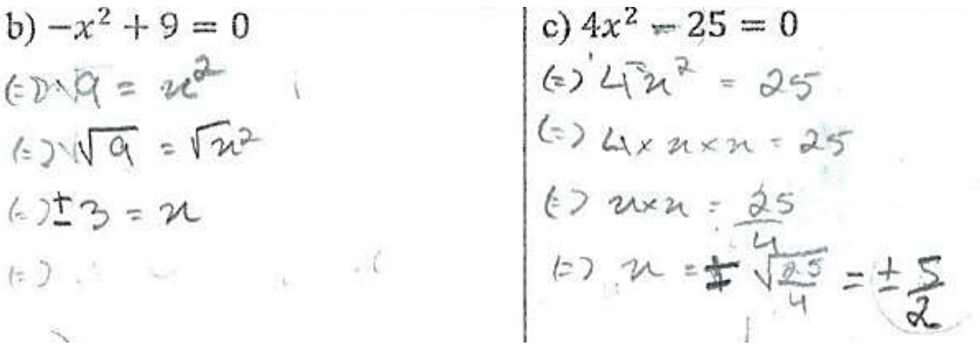


Figura 5.30 – Resolução incompleta na tarefa 7: questão 1 alíneas b e c.

Saliento, ainda, que um dos alunos utilizou uma fórmula (provavelmente queria utilizar a fórmula resolvente) para obter as soluções de uma equação mas como estava incorreta não obteve as soluções devidas, como mostra a figura 5.31:

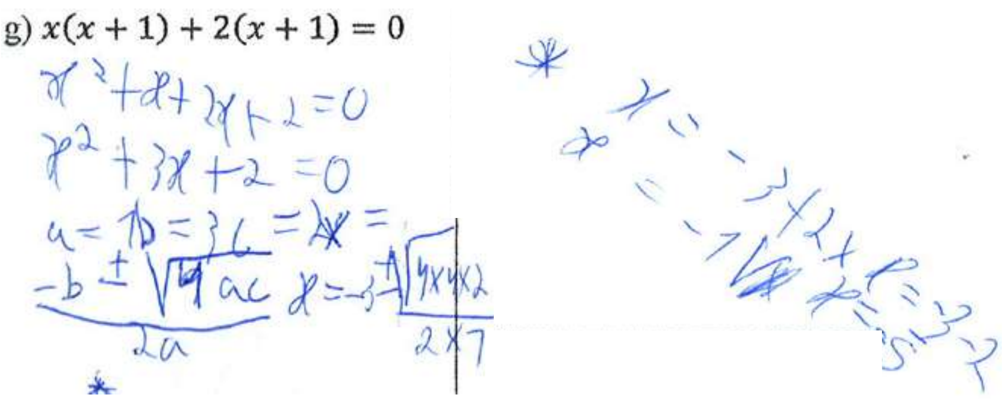


Figura 5.31 – Resolução incorreta na tarefa 4: questão 1 alínea g.

Este aluno não evidencia dificuldades na utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e na adição de monómios semelhantes mas não apresenta o conjunto-solução da equação nem usa símbolos de equivalência (situação identificada em todas as suas resoluções).

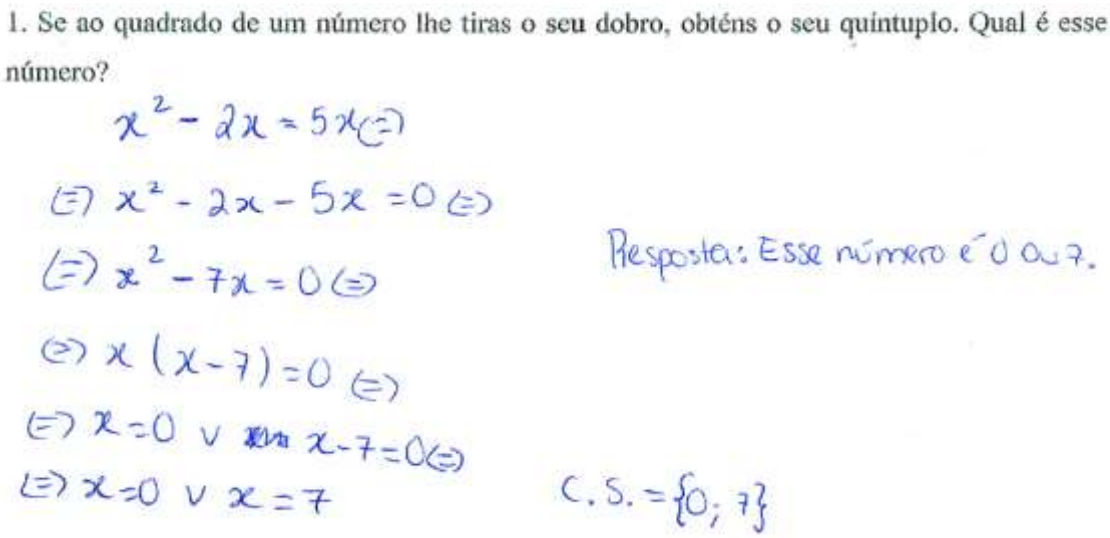
Relativamente ao último exercício de cada uma destas tarefas, os alunos não mostraram dificuldades. Todos os alunos que resolveram estes exercícios realizaram-no corretamente, construindo as seguintes equações do 2.º grau: $(x-2)(x+3)=0$ para o último exercício da tarefa 4 e $(x-9)(x+9)=0$ e $x^2=81$ para o último exercício da tarefa 7.

5.7 Tarefa 8 – *Mais desafios I*

Esta tarefa ocupou uma parte da aula de 3 de Maio. O principal objetivo desta tarefa – composta por dois problemas – é a compreensão da diferença entre solução de uma equação e solução de um problema, aspeto em que os alunos têm revelado dificuldades. Apenas será analisado o primeiro problema desta tarefa, porque os alunos não tiveram tempo de resolver o segundo problema (foi realizado mais tarde na aula de apoio ao estudo).

Dos vinte e quatro alunos presentes nesta aula, dez resolveram corretamente o problema (Figura 5.32), outros dez apresentaram resoluções incompletas (Figura 5.33 e 5.34) e quatro cometeram erros na sua resolução (Figura 5.35 e 5.36).

Por exemplo, na figura 5.32, o aluno equaciona corretamente o enunciado do problema, mostra conhecer os princípios de equivalência das equações e o processo de factorização, seleciona adequadamente a lei do anulamento do produto para o resolver e apresenta, quer a solução da equação – indicando o seu conjunto-solução – quer a solução do problema.


1. Se ao quadrado de um número lhe tiras o seu dobro, obténs o seu quíntuplo. Qual é esse número?

$x^2 - 2x = 5x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 5x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-7) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 7 = 0 \Leftrightarrow$

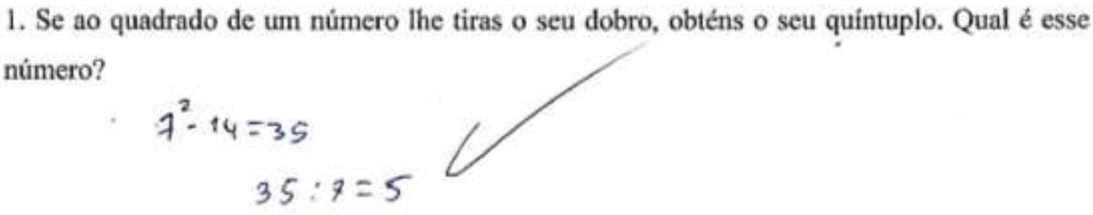
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7$

$C.S. = \{0; 7\}$

Resposta: Esse número é 0 ou 7.

Figura 5.32 – Resolução completa na tarefa 8.

Na figura 5.33, o aluno resolve o problema pelo método tentativa erro, pensando no número sete como solução do problema. Ao verificar que o número sete satisfaz as condições enunciadas no problema, o aluno não sente necessidade de procurar outros possíveis números que satisfaçam as mesmas condições. Deste modo, também não apresenta uma resposta para o problema.



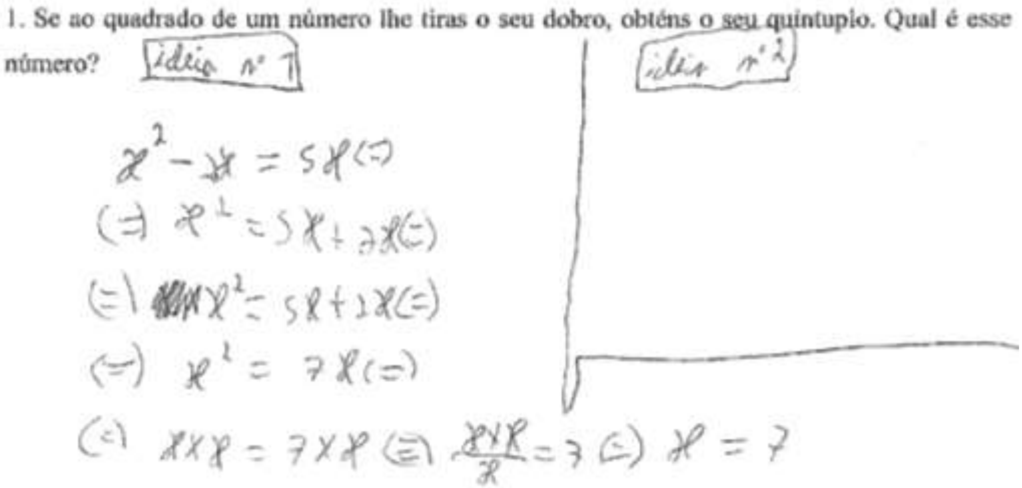
1. Se ao quadrado de um número lhe tiras o seu dobro, obténs o seu quíntuplo. Qual é esse número?

$7^2 - 14 = 35$

$35 : 7 = 5$

Figura 5.33 – Resolução incompleta na tarefa 8.

O aluno, cuja resolução se apresenta a seguir (Figura 5.34), equaciona corretamente o problema, mas decide dividir ambos os membros por x, esquecendo-se de considerar a condição $x = 0$, levando-o a obter apenas uma das soluções da equação. Este aluno, também, não apresenta o conjunto-solução da equação nem a resposta ao problema.



1. Se ao quadrado de um número lhe tiras o seu dobro, obténs o seu quíntuplo. Qual é esse número?

$\boxed{\text{ideia nº 1}}$ $\boxed{\text{ideia nº 2}}$

$x^2 - 2x = 5x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 5x + 2x \Leftrightarrow$

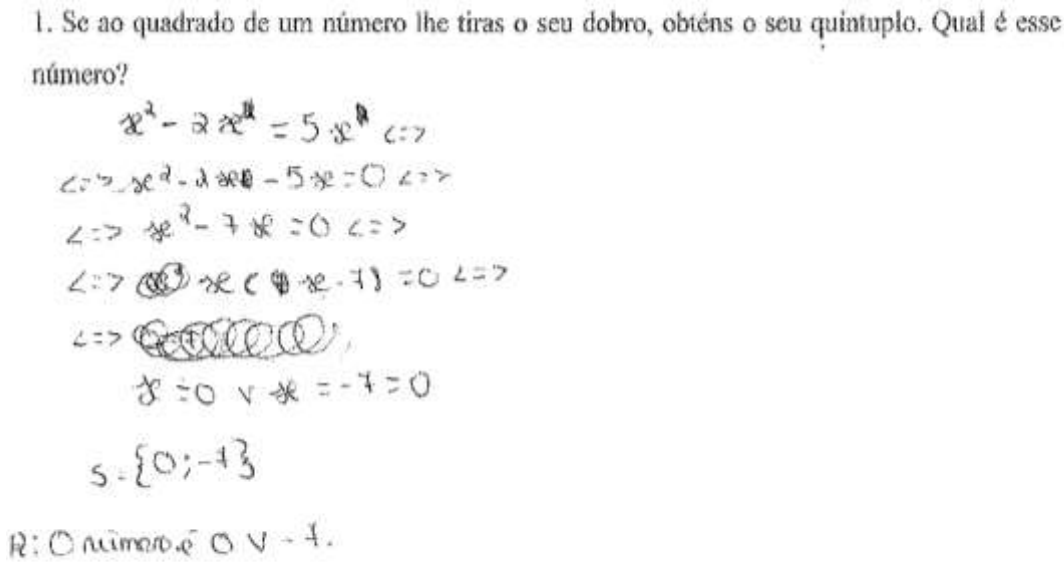
$\Leftrightarrow x^2 = 5x + 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 7x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \times x = 7 \times x \Leftrightarrow \frac{x \times x}{x} = 7 \Leftrightarrow x = 7$

Figura 5.34 – Resolução incompleta na tarefa 8.

Nos dois exemplos seguintes, os alunos cometem erros na resolução de equações do 2.º grau. Na figura 5.35, o aluno começa por equacionar o problema de modo incorreto mas reconhece o erro e reformula a expressão, obtendo uma equação correta. Ultrapassada esta hesitação inicial, o aluno aplica corretamente os princípios de equivalência das equações, o processo de factorização, a lei do anulamento do produto e apresenta, quer a diferença entre a solução da equação – indicando o seu conjunto-solução – quer a solução do problema. Comete o erro (bastante comum nas resoluções dos alunos) de colocar um símbolo de igual entre o x e o -7 quando aplica a lei do anulamento do produto, provavelmente por falta de atenção, que conduz a uma solução errada.



1. Se ao quadrado de um número lhe tiras o seu dobro, obténs o seu quíntuplo. Qual é esse número?

$x^2 - 2x = 5x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 5x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x - 7) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

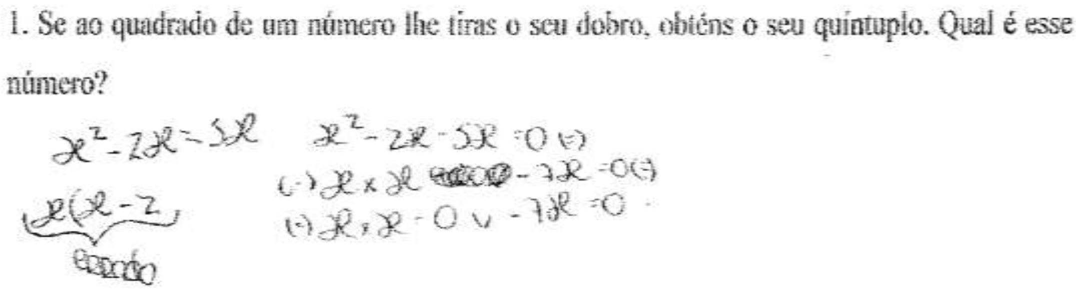
$x = 0 \vee x = -7 = 0$

$S = \{0; -7\}$

R: O número é 0 v -7.

Figura 5.35 – Dificuldades e erros na resolução da tarefa 8.

No segundo exemplo (Figura 5.36), o aluno também equaciona corretamente o problema, no entanto, não aplica corretamente a lei do anulamento do produto. Nesta resolução, o aluno aplica corretamente os princípios de equivalência de equações e as propriedades dos monómios, embora se esqueça de escrever o símbolo de equivalência entre a equação que traduz o problema e a equação $x^2 - 2x - 5x = 0$, provavelmente porque interrompeu a resolução (assinalando um erro) e continuou numa coluna paralela. Também não termina a sua resolução.



1. Se ao quadrado de um número lhe tiras o seu dobro, obténs o seu quíntuplo. Qual é esse número?

$x^2 - 2x = 5x$

$\underbrace{x(x-2}_{\text{errado}}$

$x^2 - 2x - 5x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \times x - 7x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \times x = 0 \vee -7x = 0$

Figura 5.36 – Dificuldades e erros na resolução da tarefa 8.

Saliento, ainda, que todos os alunos da turma que resolveram algebricamente o problema, utilizaram a letra x como incógnita, para definir os números desconhecidos que satisfaziam as condições do enunciado do problema.

5.8 Tarefa 9 – *Mais desafios II*

A tarefa 9, realizada a 6 de Maio, na penúltima aula que lecionei, caracteriza-se por ter um caráter problemático. O problema proposto é mais complexo que os anteriores, uma vez que se pede aos alunos para resolverem uma equação completa do 2.º grau a uma incógnita sem que eles tenham forma imediata de o fazer. Além disso, pretende-se que os alunos sejam capazes de interpretar as soluções da equação, tendo em conta a situação da realidade, apercebendo-se da existência de dois retângulos com perímetro igual a $100m$ e área igual a $1200m^2$ – um com dimensões 20×60 e outro com 30×40.

Apenas dois alunos da turma resolveram corretamente o problema pelo método tentativa erro, mas só um deles respondeu ao problema, como se exemplifica na figura 5.37.

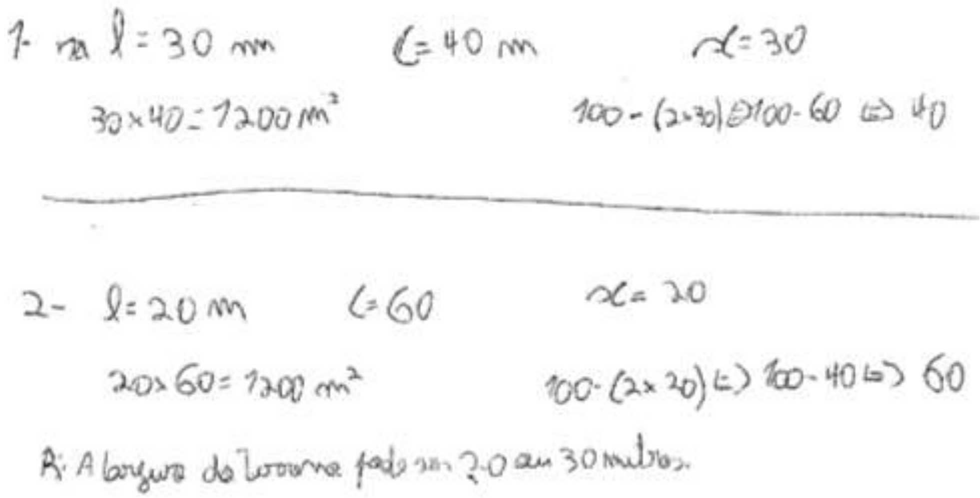


Figura 5.37 – Resolução completa da tarefa 9.

Neste exemplo, o aluno resolve corretamente o problema pelo método de tentativa e erro, embora cometa alguns erros na utilização da notação simbólica (usa incorreto do símbolo de equivalência). Neste caso, o aluno não precisou de formular algebricamente o problema e não se esquece de responder ao problema, apresentando as duas soluções possíveis.

Os restantes alunos, que tentaram resolver o problema algebricamente, cometeram muitos erros e não o chegaram a concluir. Um aluno ficou muito perto de concluir este problema através da resolução algébrica (Figura 5.38). Neste caso, o aluno traduziu o enunciado do problema por uma expressão algébrica, simplificou-a usando os princípios de equivalência das equações e chegou mesmo a fatorizá-la numa tentativa de aplicar a lei do anulamento do produto. No entanto, não é claro como é que conclui que a expressão $x^2 - 50x + 600$ é equivalente a $(x - 20)(x - 30)$ e não conclui a sua resolução. É de notar que este aluno usa corretamente o símbolo de equivalência, assim como, aplica corretamente a propriedade distributiva e a fórmula da área do retângulo.

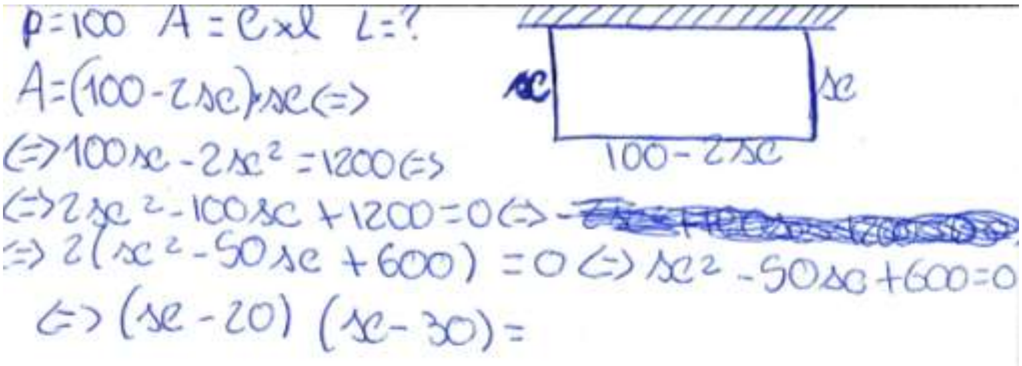


Figura 5.38 – Resolução incompleta da tarefa 9.

Na resolução seguinte (Figura 5.39), o aluno começa por traduzir corretamente o enunciado por uma expressão algébrica, reconhecendo que a área do retângulo é $A = (100 - 2x)x$. No entanto, o aluno substitui erradamente a letra A pelo valor 0 e resolve a equação aplicando a lei do anulamento do produto e obtendo, desta forma, duas soluções erradas, como reconhece no final.

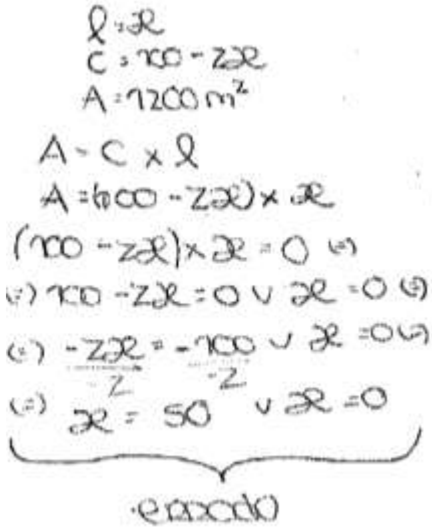


Figura 5.39 – Dificuldades e erros na resolução da tarefa 9.

Na figura 5.40, o aluno também obtém a expressão algébrica correta para a área do terreno retangular: $100x - 2x^2 = 1200$, mas depois aplica incorretamente a lei do anulamento do produto porque não se apercebe que só fatoriza uma parte da expressão e não tem, portanto, três fatores. É de salientar que o aluno utiliza a notação simbólica de modo adequado, mostrando conhecer os princípios de equivalência de equações e parece reconhecer que a condição $-1200 = 0$, sendo falsa, não altera a solução do problema porque não a considera. No final, não escreve o conjunto-solução da equação nem a resposta ao problema.

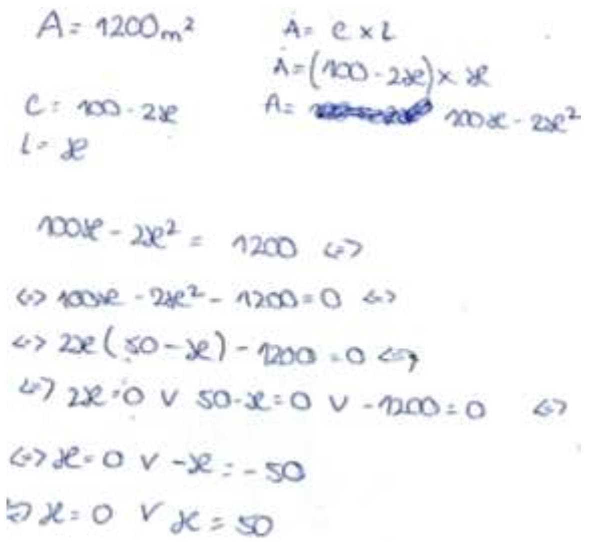


Figura 5.40 – Dificuldades e erros na resolução da tarefa 9.

O aluno, cuja resolução se apresenta a seguir (Figura 5.41), equaciona corretamente o problema e utiliza a letra avaliada, ou seja, atribui um valor à letra desde o princípio. Neste caso, se $x = 20$, o valor da expressão $x(100 - 2x)$ é 1200 e, coincide com o valor da área do terreno. No entanto, este aluno, apenas encontrou uma das soluções possível para este problema, não respondendo ao problema.

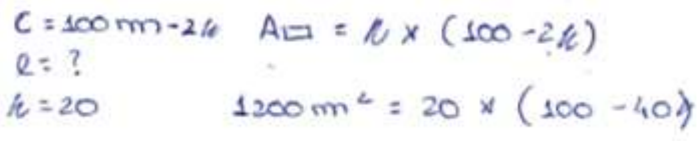


Figura 5.41 – Resolução incompleta na tarefa 9.

Por fim, uma das resoluções (Figura 5.42) – bastante comum nesta tarefa – de um dos alunos da turma, mostrando o seu raciocino correto e sem qualquer erro na sua resolução, até se deparar com a expressão $600 - 50x + x^2 = 0$, não conseguindo nesta fase da aula avançar na resolução da sua equação.

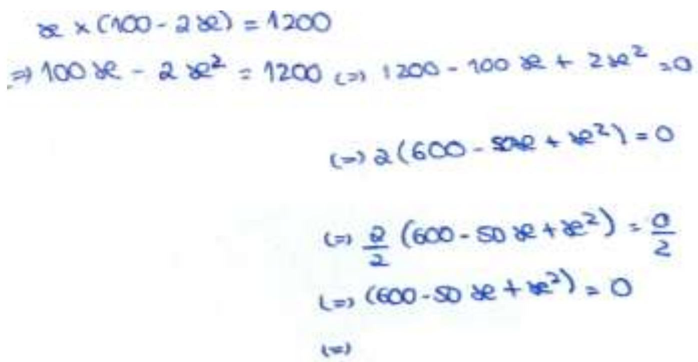


Figura 5.42 – Resolução incompleta na tarefa 9.

5.9 Tarefa 10 – *Mais desafios III*

Ainda na mesma aula foi realizada a tarefa 10. Esta tarefa consistia na resolução de um problema em que os alunos tinham que interpretar o enunciado e traduzi-lo por uma representação algébrica e depois resolvê-lo, quer algebricamente ou por tentativa erro. Além disso, o processo de resolução, do problema, poderia ser facilitado se existisse uma figura que fizesse acompanhar o enunciado. Dos vinte e seis alunos, só um resolveu corretamente o problema (Figura 5.43).

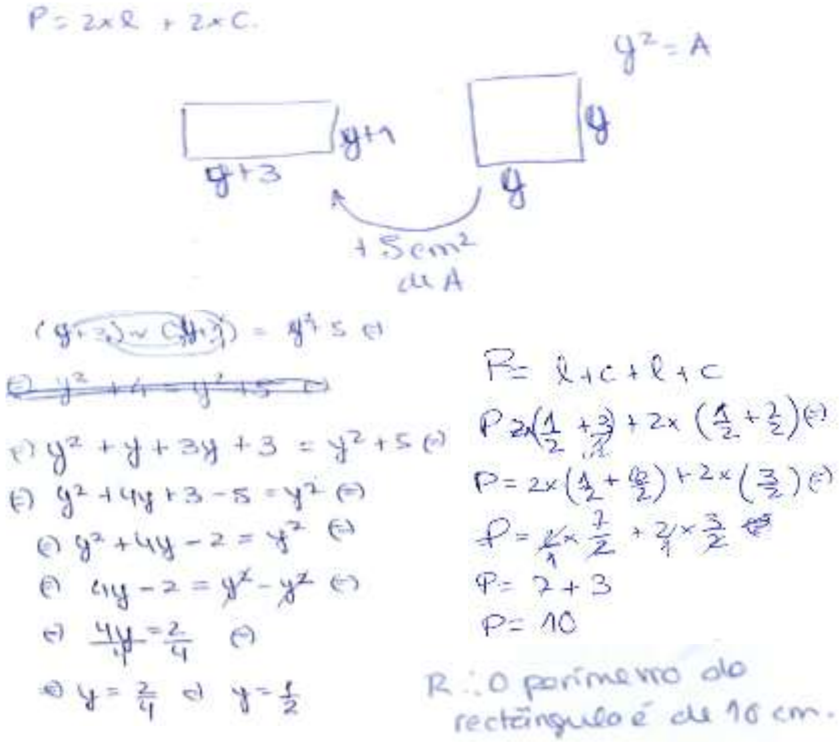


Figura 5.43 – Resolução completa na tarefa 10.

Este aluno começa por aplicar erradamente a propriedade distributiva da multiplicação mas depois corrige o seu erro e resolve corretamente a equação $(y+3)(y+1)=y^2+5$ aplicando corretamente os princípios de equivalência. No entanto, não indicou o seu conjunto-solução. De seguida, o aluno utiliza corretamente o valor obtido (na sua equação inicial) na expressão do perímetro, onde mostra dominar o calculo com frações, e responde ao problema.

O aluno, cuja resolução se apresenta a seguir (Figura 5.44), foi um dos dez alunos da turma que equacionou corretamente uma parte do problema e resolveu-a sem qualquer tipo de erro e obteve o seu conjunto-solução, no entanto, não terminou a resolução do problema.

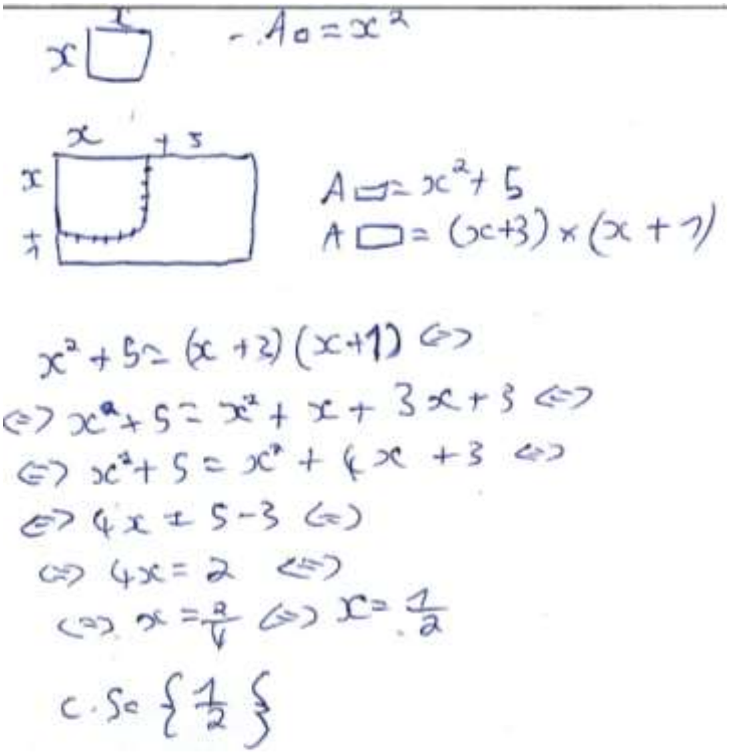


Figura 5.44 – Resolução incompleta da tarefa 10.

A figura seguinte (5.45) mostra outro exemplo de resolução idêntica ao do aluno anterior, mas onde o aluno tenta resolver o problema por tentativa erro. Este aluno acaba por abandonar a sua resolução, porque não encontra a medida de comprimento certa para o lado do quadrado. O aluno não se apercebeu que estava a escolher valores demasiado grande para a medida de comprimento do quadrado, tentando sempre com medidas de comprimento cada vez maiores.

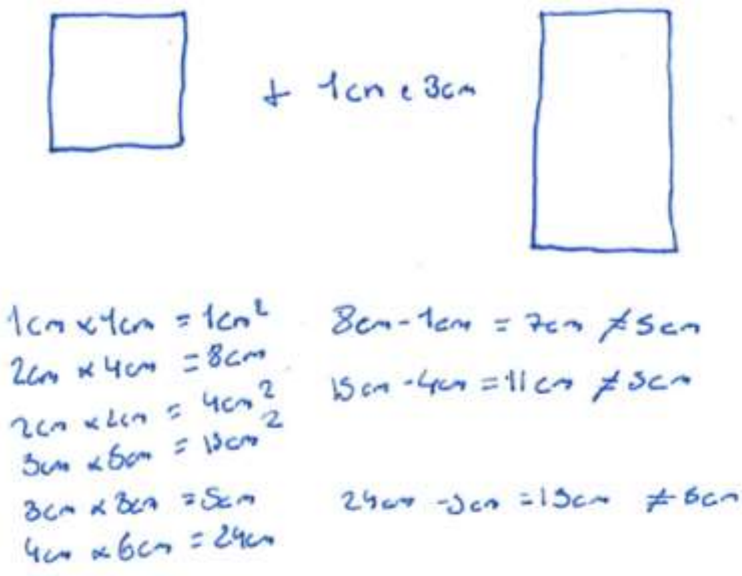


Figura 5.45 – Resolução incompleta da tarefa 10.

A próxima figura (5.46), mostra uma resolução (de um dos onze alunos que apenas equaciona corretamente o problema) até então correta, mas bastante incompleta. Este aluno indica, ao esboçar as setas, que pretende aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, no entanto, não o concretiza.

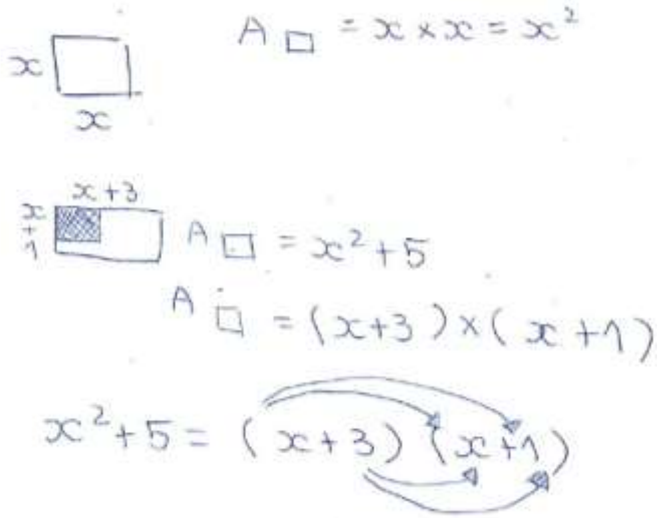


Figura 5.46 – Resolução incompleta da tarefa 10.

As resoluções apresentadas nas figuras 5.47 e 5.48 foram as únicas resoluções incorretas que surgiram na turma. Na primeira figura, o aluno escreve, erradamente, a equação $(x+3)^2 + (x+1)^2 = 0$, o que possivelmente (para o aluno) poderia definir a área do retângulo de lado $x+1$ e comprimentos $x+3$. No entanto, mostra perceber que a área do quadrado de lado x é x^2, assim como define correta e algebricamente a área do retângulo cuja área excede em $5cm^2$ a área do quadrado inicial, através da expressão $x^2 + 5$.

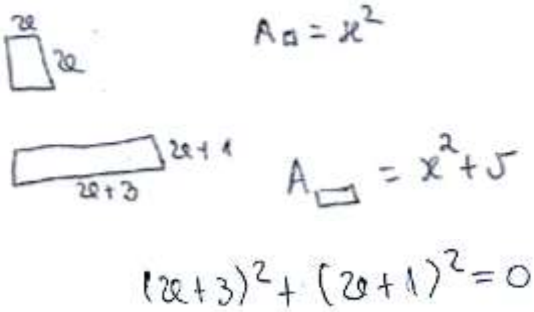


Figura 5.47 – Dificuldades e erros na resolução da tarefa 10.

Na resolução da figura 5.48, o aluno engana-se na expressão para a área do retângulo – somando os lados em vez de os multiplicar. Além disso, o aluno decompõe incorretamente o polinómio $x^2 + 1 - 2x = 0$ em fatores, recorrendo ao caso notável da multiplicação de binómios: diferença de quadrados. Isto porque a expressão: $x^2 + 1 - 2x = 0$ é o quadrado do binómio $x - 1$. No entanto, este aluno revela ter compreendido a resolução de equações envolvendo a lei do anulamento do produto, nas três últimas expressões da sua resolução.

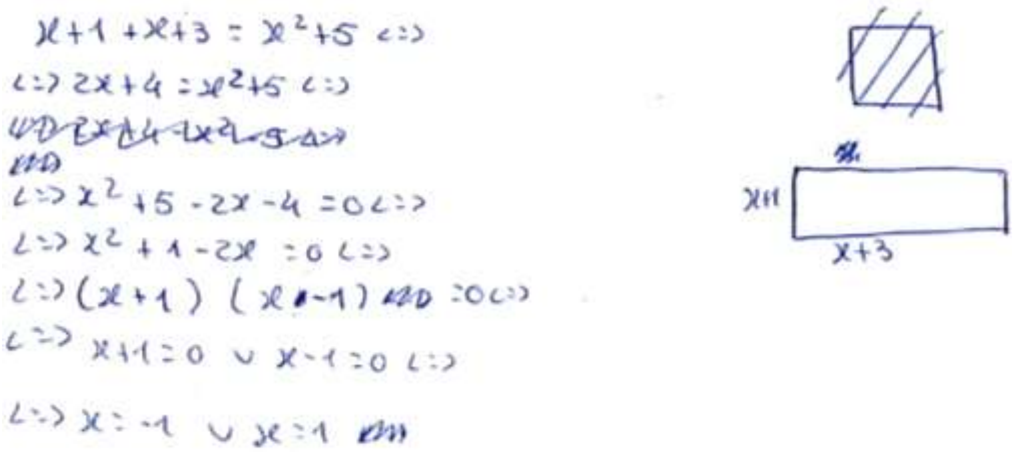


Figura 5.48 – Dificuldades e erros na resolução da tarefa 10.

De evidenciar que toda a turma – com exceção de dois alunos que não tentaram resolver o problema – utilizou uma representação pictórica correta da informação disponível no enunciado, com o objetivo de uma melhor organização dos dados apresentados no enunciado, assim como, traduzi-la numa expressão algébrica. Este processo foi facilitado pela representação pictórica feita pelos alunos.

5.10 Tarefa 11 – *Cubos e pirâmides quadrangulares*

A tarefa *Cubos e pirâmides quadrangulares*, realizada pelos alunos a 9 de Maio, tem carácter exploratório e visa proporcionar, aos alunos, o uso de conceitos e procedimentos algébricos de maior complexidade (demonstração matemática que envolve uma equação do 3.º grau com duas incógnitas), mas sem perder de vista o objetivo de consolidar os procedimentos algébricos, estudados nas aulas anteriores. Além disso, procura estabelecer conexões com a Geometria, contribuindo, assim, para evitar uma abordagem à Álgebra apenas como um conjunto de procedimentos a memorizar.

Após a apresentação da tarefa e de terem usado os materiais manipuláveis, os alunos mostraram algumas dificuldades em converter a linguagem natural do enunciado numa representação algébrica. Esta dificuldade foi ultrapassada através da discussão em grande grupo onde os alunos compreenderam o que era pedido, concluindo que teriam de provar que $a = 2 \times h$, utilizando letras como números generalizados. A seleção da letra a para representar a aresta e da letra h para representar a altura foi unânime entre os alunos por ser fácil de identificar (Figura 5.49).

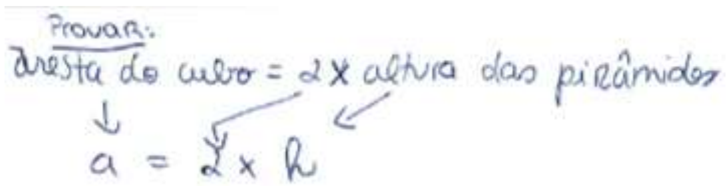


Figura 5.49 – Representação algébrica do enunciado, após a discussão.

De evidenciar que todos os alunos presentes nesta aula iniciaram a sua demostração matemática por escrever: o volume do cubo é igual a seis vezes o volume de uma pirâmide quadrangular, ou seja, ninguém considerou a hipótese do volume de uma pirâmide quadrangular ser o mesmo que o volume do cubo dividido por seis.

Cerca de metade dos alunos resolveu corretamente o problema. Um desses alunos, cuja resolução se apresenta a seguir (Figura 5.50), mostra corretamente o que é pedido na tarefa, resolve a equação decompondo em fatores o polinómio de grau três e aplicando a lei do anulamento do produto, obtendo a expressão matemática que queria provar, ou uso incorreto da notação simbólica.

$V_{cubo} = a^3$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_b \times h$

$V_{cubo} = 6 \times V_{pirâmide}$

$a^3 = 6 \times \frac{1}{3} Ab \times h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3 = 2 Ab \times h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3 = 2a^2 \times h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3 - 2a^2 h = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2(a - 2h) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 = 0 \vee a - 2h = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2h$

R: verdade. $a = 2h$, porque a nunca pode ser 0.

Figura 5.50 – Resolução completa na tarefa 11.

Na resolução seguinte, o aluno responde corretamente à tarefa, embora não a tenha resolvido algebricamente, como pedido no enunciado (Figura 5.51). Este aluno percebe que os vértices dos topos das seis pirâmides encontram-se no centro de rotação do cubo, logo o comprimento da aresta do cubo é o dobro da altura de cada pirâmide quadrangular.

Aresta do cubo = 2 × altura das Pirâmides

$a = 2 \times h$

A aresta do cubo é igual ao dobro da altura da Pirâmide porque os vértices E tocam-se todos ao centro do cubo. Logo a aresta tem de ser o dobro da altura da Pirâmide

Figura 5.51 – Resolução correta para a tarefa 11, mas não é analítica.

Para finalizar, uma das resoluções incompleta (Figura 5.52) que exemplifica as resoluções dos restantes alunos da turma (resoluções essas muito semelhantes a esta). É de notar que este aluno apesar de dominar os princípios de equivalência das equações, ainda apresenta, na sua resolução, a forma como os utiliza, sendo visível na terceira equivalência da sua equação, onde mostra que tem de subtrair a mesma quantia a ambos os membros da equação para obter uma equação equivalente.

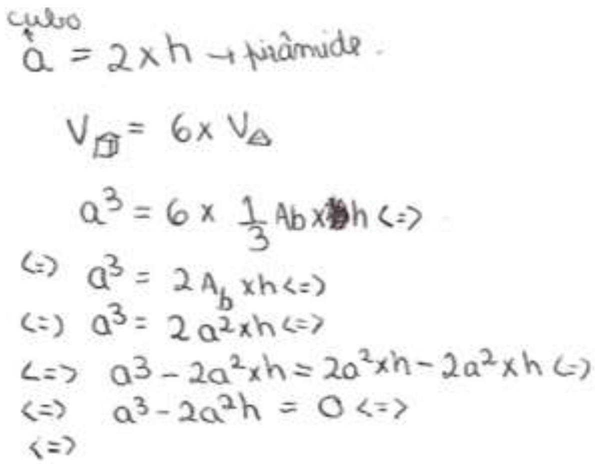


Figura 5.52 – Resolução incompleta da tarefa 11.

5.11 Problema do teste de avaliação sumativa

Com este problema pretendia avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos, no final da unidade de ensino, relativas à resolução de equações (incompletas) do 2.ºgrau a uma incógnita neste contexto.

Relativamente a este problema, as respostas obtidas são do seguinte tipo:

Problema	N.º alunos
Traduz o problema, resolve equação, critica soluções e responde	0
Traduz o problema, não termina a resolução da equação	1
Traduz o problema, resolve a equação com alguns erros e responde	1
Traduz o problema, resolve a equação com alguns erros e não responde	1
Traduz uma parte do problema	2
Traduz incorretamente o problema, resolve equação e responde	4
Traduz incorretamente o problema, resolve equação e não responde	2
Traduz incorretamente o problema, não resolve equação e não responde	3
Não responde	13
Total	27

Quadro 5.1 – Dados relativos às respostas do problema do teste de avaliação.

Os alunos, neste teste de avaliação (último teste do período), tiveram um desempenho pouco satisfatório, comparativamente com os outros realizados ao longo do ano, talvez, por integrar apenas exercícios e problemas retirados e/ou baseado dos exames nacionais de 9.º ano e dos testes intermédios de 8.º ano. Para além disto, o teste era extenso e o problema que propus foi um dos últimos (décimo problema), o que pode ter levado a que treze dos vinte e sete alunos não chegaram a iniciar a resolução do problema.

Neste problema, nenhum aluno resolve corretamente; cinco alunos traduzem, corretamente, o problema para linguagem algébrica, sendo que dois só o fazem para uma parte do enunciado e nove alunos traduzem incorretamente o enunciado do problema.

Numa análise global, a todo o teste, constatou-se que os alunos aprenderam a resolver equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, apesar de cometerem alguns erros referidos por Ponte, Branco e Matos (2009), tais como traduzir condições verbais numa equação do 2.º grau e interpretar as suas soluções, de acordo com as condições dadas. No que diz respeito à interpretação do enunciado deste problema, os alunos mostraram bastantes dificuldades, assim como, na sua tradução para linguagem algébrica.

Capítulo 6

Reflexão sobre o trabalho realizado

Neste capítulo final começo por apresentar uma breve síntese do estudo realizado. Depois, a partir da análise de dados realizada, apresento as suas principais conclusões, tendo em conta os objetivos e as questões inicialmente formuladas. Concluo com uma reflexão pessoal sobre este estudo, onde refiro as aprendizagens realizadas e as implicações para a minha prática profissional.

6.1 Síntese do estudo

Com este estudo, procurei compreender o pensamento algébrico dos alunos do 8.º ano na manipulação de expressões algébricas, em particular quando resolvem tarefas envolvendo equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita. Para isso, procurei dar resposta às seguintes questões:

i. Como procedem e que dificuldades evidenciam os alunos na interpretação dos enunciados de tarefas que envolvam equações do 2.º grau, em particular no que se refere a aspetos de tradução do problema por uma equação?

ii. Quais as estratégias que os alunos utilizam na resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita? Que erros e dificuldades evidenciam?

iii. Quais os conhecimentos anteriores que os alunos mobilizam para resolver tarefas envolvendo equações do 2.º grau?

O estudo tem por base uma unidade didática – “Sequências e regularidades. Equações”, em particular no que diz respeito às equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita. A sua lecionação decorreu no 3.º período do ano letivo de 2012/13, numa turma do 8.º ano de escolaridade na Escola Básica 2, 3 de Fernando Pessoa. A unidade referida assenta no ensino exploratório, contendo tarefas de cunho exploratório, exercícios e problemas, assumindo este último um papel mais dominante neste estudo.

O método de recolha de dados utilizado foi a recolha documental, particularmente, as resoluções dos alunos das tarefas propostas e a observação das aulas com recurso a notas de campo e a registos por interposta pessoa. A análise dos dados foi motivada pelas questões de estudo e foi apoiada pelo enquadramento teórico concretizado. Procurei dar resposta às questões formuladas apoiando-me na literatura, nomeadamente, em autores que refletiram sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra, sobre o estudo das equações do 2.º grau: as estratégias, os erros e as dificuldades evidenciados por alunos, assim como, as diferentes representações e tarefas matemáticas.

6.2 Principais conclusões

Neste subcapítulo, procuro dar respostas às questões de investigação, refletindo sobre os resultados do estudo e articulando-os com a literatura. As conclusões apresentadas resultam, principalmente, da análise do desempenho de todos os alunos da turma, na realização das tarefas propostas ao longo da minha lecionação. Para uma fácil leitura das conclusões, relato em separado os aspetos implícitos a cada uma das questões de estudo.

6.2.1 Como procedem e que dificuldades evidenciam os alunos na interpretação dos enunciados de tarefas que envolvam equações do 2.º grau, em particular no que se refere a aspetos de tradução do problema por uma equação?

Nas diversas tarefas propostas em sala de aula, foram várias as dificuldades manifestadas pelos alunos em relação à interpretação dos seus enunciados. Os alunos revelam dificuldades na tradução do enunciado para a linguagem algébrica, nomeadamente, na atribuição de significado às possíveis incógnitas (alusivas no enunciado do problema), mostrando assim algumas fragilidades na explicitação das relações existentes entre as incógnitas e a concretização da escrita dessas relações algebricamente.

Quanto a tarefas que envolvam a tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica, os alunos, em geral, mostram como primeira dificuldade a interpretação dos enunciados – esta dificuldade observa-se quer na linguagem quer na compreensão e interpretação da situação descrita no enunciado, como no uso e na escolha de letras para traduzir o enunciado para a linguagem algébrica, assim como, na compreensão de conceitos matemáticas. Os alunos interpretam a letra como uma simples abreviatura de um objeto ou palavra, em lugar de a compreenderem como a quantidade associada a esse objeto ou palavra. A tradução da linguagem natural para a algébrica é uma dificuldade, na grande maioria dos alunos, porque apela ao significado vindo da própria estrutura algébrica, envolvendo a letra como símbolo (Kieran, 2007). Esta dificuldade na atribuição de significado concreto às letras, tendo em consideração o seu contexto, também é evidenciada no estudo realizado por Pesquita (2007).

No entanto, no decorrer da unidade de ensino, os alunos resolveram problemas com contextos diversificados, ganhando uma visão mais perspicaz e algébrica de os resolver e desenvolveram algumas capacidades transversais: raciocínio matemático, comunicação matemática, estabelecimento de conexões, sentido crítico e autonomia, entre outras. À medida que iam resolvendo mais problemas os alunos passaram a traduzir corretamente os seus enunciados para a linguagem algébrica. Mas, considero que estes resultados só se tornaram visíveis, porque os alunos sentiram necessidade de recorrer a representações pictóricas, mostrando, assim, que fazem conexões entre as diferentes representações: algébrica, pictórica, entre outras (Clement, 2004; Duval, 2006). No entanto, ainda existe uma longa jornada a percorrer, em função do desenvolvimento desta competência.

Uma análise feita com base nas categorias apresentadas por Grossmann, Gonçalves e Ponte (2009) permite-me concluir que é impossível destacar um aluno, que tenha um sentido de símbolo mais desenvolvido que os restantes alunos, participantes neste estudo, uma vez que há alguns alunos que conseguem traduzir facilmente a linguagem natural para algébrica e outros que tem mais facilidade na manipulação simbólica.

Os alunos, em geral, revelaram um sentido de símbolo menos apurado no trabalho de equações no contexto de um problema, quando comparado com o revelado nas equações (por exemplo, tarefas realizadas em trabalho extra letivo). No entanto, os alunos mostraram alguma agilidade na manipulação simbólica, mas, que por vezes, era posta em causa pela falta de mobilidade dos conhecimentos anteriormente estudados, como por exemplo, em procedimentos simples mas extremamente importantes que colocavam em risco o resultado final.

Em suma, as aprendizagens evidenciadas neste ponto devem-se, ao facto, dos alunos terem compreendido o significado e a importância da letra como incógnita, o uso de representações pictóricas como auxilio na tradução do enunciado para expressões algébricas e igualmente a compreensão, por parte dos alunos, do significado da equação e de solução.

6.2.2 Quais as estratégias que os alunos utilizam na resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita? Que erros e dificuldades evidenciam?

Durante o trabalho autónomo dos alunos envolvidos neste estudo, notei que precisavam de algum tempo para definirem uma estratégia para a resolução das tarefas propostas. A maioria dos alunos experimentou diversas estratégias. Alguns alunos tentavam resolver os problemas por tentativa e erro e por experimentação de valores mas depois abandonavam essa estratégia, optando por recorrer à escrita e resolução algébrica das equações. De facto, a utilização de expressões algébricas de equações do 2.º grau, na tradução do enunciado das tarefas, por parte dos alunos, foi a estratégia mais comum para iniciarem a sua resolução, embora poucos alunos recorreram ao método tentativa e erro. Para além do método tentativa erro e experimentação de valores, resolvem a equação pelo método que Kieran (1992) caracteriza como *desfazer* (undoing). Com isto, estes alunos evitaram abordar a equação como estrutura matemática e optaram por operar, apenas, com números.

No estudo das equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, os alunos revelam algumas dificuldades, no uso de linguagem algébrica, em duas das três áreas referidas por Booth (1984), nomeadamente, na interpretação das letras e na formalização dos métodos usados. Quanto à área intitulada como compreensão de notações e convenções, os alunos, no geral, não revelam dificuldades.

Alguns dos alunos deste estudo, nas primeiras tarefas, revelaram dificuldades na aplicação dos princípios de equivalência na resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, talvez, devido a erros na atribuição de significado a expressões algébricas e manipulação simbólica (nomeadamente, as condições de equivalência) e por permanecerem demasiado apegados ao trabalho desenvolvido em Aritmética, tal como referido por Ponte, Branco e Matos (2009).

Outra dificuldade evidenciada por estes alunos, na sua maioria, foi na aplicação dos métodos de resolução algébrica de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita. Os erros cometidos devem-se a incorreções de aplicação do processo de factorização, dos casos notáveis da multiplicação de binómios, da lei do anulamento do produto, e menos no método que utiliza a noção de raiz quadrada, possivelmente, porque este último lhes seja mais familiar (a noção de raiz quadrada foi estudada, por estes alunos, no ano letivo anterior). No entanto, e também por este motivo, alguns alunos ignoram que as equações quadráticas deste tipo ($x^2 = k$, com $k > 0$) possam ter duas soluções, ou seja, ignoram a existência de duas soluções simétricas, e consideram como solução da equação apenas a raiz positiva. Também o estudo realizado por Vaiyavutjamai, Ellerton e Clements (2005), revela que alunos com níveis de escolaridade mais elevados continuam a cometer este erro.

No processo de factorização as dificuldades também se fazem sentir, nomeadamente, na ausência de significado para o conceito fator e fator comum. Neste estudo, assim como no estudo realizado por Nabais (2010), este tipo de dificuldade, que transparece das resoluções dos alunos, está interligado com a factorização de polinómios, notando-se algumas lacunas ao nível da apropriação de significado da propriedade distributiva e do sinal de "=" como símbolo de equivalência; assim como, a utilização da lei do anulamento do produto, que muitas vezes foi aplicada a equações em que o primeiro membro não se encontra fatorizado e a equações em que o segundo membro é diferente de zero.

Não posso deixar de referir que no final deste estudo, ainda encontro alunos que não criticam as soluções (da equação) que obtiveram, conceito este que deveria ser-lhes familiar, pois recentemente estudaram as equações literais, os sistemas de equações e as equações do 1.º grau (esta última estudada no ano anterior). Estes alunos mostram, por vezes, falta de capacidade de interpretar e criticar as soluções de uma equação quadrática, no contexto de um problema, mostrando a não compreensão entre a diferença de solução de uma equação para a solução de um problema. De salientar que este aspeto também evidenciou melhorias ao longo deste estudo.

De um modo geral, a estratégia utilizada por todos os alunos na resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita foi: a transposição de um membro para o outro com a inversão da operação envolvida, onde de seguida utilizaram a noção de raiz quadrada; e a decomposição de um polinómio em fatores pondo os fatores comuns em evidência e/ou usando os casos notáveis da multiplicação, para de seguida aplicarem a lei do anulamento do produto. Quando existe um grande número de alunos que resolvem as equações quadráticas pelo mesmo método, é frequente que os poucos que seguem estratégias diferentes, optem pela estratégia que é mais comum na turma. No entanto, fiz o possível para serem discutidas em grande-grupo diversas estratégias de resolução para a mesma equação.

6.2.3 Quais os conhecimentos anteriores que os alunos mobilizam para resolver tarefas envolvendo equações do 2.º grau?

Os alunos deste estudo recorrem aos princípios de equivalência de equações, que já utilizavam na resolução de equações do 1.º grau, mostrando algumas dificuldades na sua compreensão e aplicação. Com efeito, a aplicação dos princípios de equivalência na resolução de equações do 2.º grau, por alguns destes alunos, revela incoerências pois em algumas tarefas aplicam os princípios corretamente e em outras não cometem erros. O estudo realizado por Nabais (2010) também revela que os alunos, na resolução de equações do 1.º grau, podem ter aprendido a aplicar os princípios de equivalência aparentando compreensão dos mesmos, mas com a mudança para as equações do 2.º grau surgem processos incorretos que demonstram falta de compreensão do significado matemático destes princípios e, possivelmente, da noção de equação.

O facto de alguns alunos traduzirem corretamente o enunciado para linguagem algébrica, mas depois não conseguirem concluir com sucesso a resolução da respetiva equação, leva-me a acreditar que as regras de manipulação das equações (em geral), ainda, não foram interiorizadas por estes alunos. Esta situação vai de encontro à fraca compreensão dos procedimentos utilizados para resolver equações referida no estudo realizado por Lima e Tall (2010), tornando-se visível uma espécie de *personificação processual* no uso dos princípios de equivalência. Além disso vai ao encontro de Kieran (1992), que sugere que alguns alunos que usam o método de transposição não estão a operar as equações como estrutura matemática, mas, simplesmente, a aplicar cegamente a regra: "muda de membro, muda de sinal".

Alguns dos alunos, em alguns dos problemas propostos, mantem uma visão global sobre o que estão a trabalhar. Um sentido de símbolo apurado, segundo Arcavi (1994), requer uma verificação constante da resposta, que até pode ser feita por uma simples substituição de valores, sendo que poucos foram os alunos que verificaram a veracidade das suas respostas. Revelando assim, que estes alunos, ainda estão dependentes da simples manipulação simbólica.

De um modo geral, os alunos mobilizaram conceitos estudados anteriormente, facilitando a aprendizagens das equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, como o uso dos casos notáveis da multiplicação, a decomposição de um polinómio em factores, mostram conhecer: as propriedades e as regras das operações em Q; os polígonos e as respetivas características e áreas; a decomposição de polígonos; os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra (Por exemplo: $\pm$; $\neq$; $\vee$); a simplificação de expressões algébricas; o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum; as isometrias; a regra de três simples; a congruência de figuras; e os sólidos geométricos: as respetivas características e volumes.

6.3 Reflexão de carácter pessoal

A principal motivação desta investigação tem um carácter muito pessoal. Decidi investigar sobre este tema, porque quando garota era o tema que os meus colegas sentiam mais dificuldade, pedindo-me para verificar se as suas resoluções estavam corretas.

As aulas lecionadas, assim como, a análise das resoluções dos alunos, fizeram com que eu ponderasse, mais uma vez, no quanto é importante planificar uma aula. Concordo com as ideias de Ponte e Serrazina (2009) quando referem que a importância de planificar, deve-se ao facto de (i) organizar o trabalho verdadeiramente em função do papel formativo da disciplina; (ii) refletir sobre os conteúdos e métodos de trabalho e materiais mais adequados à aprendizagem; (iii) controlar e permitir ajustamentos permanentes de acordo com as necessidades e interesses dos alunos; e (iv) distribuir o tempo letivo de acordo com as metas de aprendizagem que pretende atingir. Com isto quero dizer que o plano de aula deve ser flexível. Os meus planos de aula sofreram alterações que na altura foram as que me pareceram mais ajustadas às dificuldades que observei nos alunos. No entanto, compreendi que a quantidade de tarefas a propor aos alunos numa aula não é o mais importante, mas sim a escolha de tarefas adequadas para gerar momentos de aprendizagem nos alunos.

Ao elaborar as tarefas, tive consciência que estava a ser ambiciosa nalgumas delas, no entanto, sempre tive como objetivo proporcionar momentos de aprendizagem e dar ao aluno um papel ativo na construção do seu próprio conhecimento. Aprendi com a minha professora cooperante, o quanto é importante mantar expectativas elevadas e foi com este espírito que mantive e lhes propus (nas aulas por mim lecionadas) algumas tarefas mais desafiantes.

As tarefas propostas aos alunos influenciam fundamentalmente a sua aprendizagem. Nas minhas planificações tentei prever, tanto quanto possível, as dificuldades dos alunos ao realizarem as tarefas propostas. No entanto, ainda surgiram algumas que não tinha contemplado e, em plena aula, foi necessário ajudar os alunos a ultrapassá-las, proporcionando-se, deste modo, momentos de aprendizagem também para mim.

Esta experiência letiva desenvolveu em mim uma visão interrogativa sobre as produções dos alunos. A análise de dados que realizei permitiu-me perceber que não posso deixar que as minhas crenças me influenciem, devo ser objetiva nessa análise e questionar-me: Que estratégia utiliza? Que dificuldades sentiu? Que erros cometeu? Que conhecimentos já mobiliza? Só desta forma poderei ter um entendimento mais completo das aprendizagens realizadas pelos alunos.

As discussões em grande grupo também foram, para mim, momentos ricos de aprendizagem. Com as aulas compreendi o papel do professor no momento da discussão coletiva da tarefa, proporcionando aos alunos oportunidades para apresentarem e avaliarem as suas várias estratégias de resolução, mostrando-lhes que não existe uma única estratégia possível e correta. Tentei, também, aproveitar as tentativas e os erros dos alunos, observando o caminho usado para chegar à solução da tarefa. Essa observação serviu, frequentemente, para compreender o raciocínio dos alunos e preparar as discussões em torno da resolução dessas tarefas, com o intuito de conceber processos de resolução diferentes dos já aprendidos.

Um dos aspetos menos positivo, foi o facto de muitos dos alunos envolvidos neste estudo não realizarem os trabalhos de casa solicitados (que consistiam essencialmente em exercícios, sendo necessários para ganharem agilidade e prática na resolução de equações quadráticas), interferindo negativamente as aprendizagens, porque os alunos perderam uma oportunidade de explorar estas tarefas sozinhos em casa, assim como, a metodologia prevista para a realização das tarefas propostas.

Ao realizar este estudo pude refletir sobre as minhas estratégias de ensino e sobre a minha prática profissional e parece-me que estou num bom “caminho” para me tornar numa boa professora que cativa os seus alunos e consegue ensinar.

Na minha opinião, um dos maiores problemas do ensino é os alunos não se sentirem motivados para aprender, por isso, todas as estratégias da motivação são uma mais-valia para agarrar as turmas e despertar o interesse dos alunos. Por exemplo, posso pensar num aluno que "detesta" (ouviu tanto dizer que é horrível que antes de aprender já diz que não gosta) Matemática. Se o professor for muito estimulante, propuser tarefas interessantes e desafiadoras, o que começa por ser motivação externa – professor que tenta motivar os alunos e levá-los a envolverem-se em atividades matemáticas – pode transformar-se em motivação interna – aqueles alunos passarem a gostar e pensar matematicamente.

Ao longo da realização deste estudo foram surgindo questões que podem ser objetivo de futuras investigações, nomeadamente, a utilização de recursos educativos deve ser cada vez mais pensada e aplicada pelos professores em sala de aula, seria interessante estudar se o uso de materiais manipuláveis influência na aprendizagem (dos alunos) da resolução das equações do 2.º grau. Além disso, durante a intervenção e como investigadora, mesmo depois de ter sentido algumas dificuldades nesta experiência enriquecedora, cresceu em mim uma grande vontade em investigar algo mais sobre este tema. Quem sabe, numa próxima oportunidade, gostaria de analisar a evolução do pensamento algébrico nos alunos ao longo do 2.º e 3.º ciclo de escolaridade.

Referências

Abrantes, P. (1985). *Planificação no ensino da Matemática*. Lisboa: Departamento de Educação da Universidade de Lisboa.

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática, 8*, 7-10 e 35.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Alves, M. (2004). *Currículo e Avaliação – Uma perspectiva integrada* (1.ª ed.). Porto: Porto Editora.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2006). *El desarrolo y el uso del sentido de los símbolos.* Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Barbosa, E. (2007). *A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação com alunos do 8.º ano de escolaridade*. Lisboa: APM. .

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of Algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp.115-136). Dordrecht: Kluwer.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practise, 5*(1), 7-74.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Campos, A. R. M. (2010). *O discurso do professor no ensino e aprendizagem das equações literais no 8.º ano, no âmbito da experimentação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico* (Relatório de prática de ensino supervisionada, Universidade de Lisboa).

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Introdução da tarefa aos alunos: Da preparação à concretização em sala de aula. In H. Oliveira, A. P. Canavarro & L. Menezes (Orgs.), *Caso 3: Eleição para o delegado de turma (3.º ciclo)*, Projeto P3M. (disponível em http://p3m.ie.ul.pt)

Clement (2004). A model for understanding, using and connecting representations. *Teaching Children Mathematics, 11*(2), 97-102.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education*. Londres: Reutledge & Falmer.

Conceição, A., & Almeida, M. (2011). *Matematicamente falando 8*. Porto: Areal Editores.

Departamento de Educação Básica (DEB) (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais.* Lisboa: ME/DEB.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2008). Registros de representações semióticas e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. Machado (Org.), *Aprendizagem em matemática: Registros de representações semióticas* (4.ª ed.). São Paulo: Papirus Educação.

Evalsed (2009), Manual técnico II: Métodos de avaliação – A recolha de dados: Técnicas de observação. Retirado em 4 de Outubro de 2013 de http://www.observatorio.pt/item1.php?lang=0&id_channel=16&id_page=548.

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das aprendizagens: desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa: Texto Editores.

Fouche, K. (1997). Algebra for everyone: Start early. *Mathematics in the Middle School, 2*(4), 226-229.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Maheah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 176-200). New York, NY: Routledge.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, *78*(5), 361-367.

Grossmann, M. T., & Ponte, J. P. (2011). O sentido do símbolo de um aluno e a álgebra do 12.º ano. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte (Eds.). *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Póvoa de Varzim: SPIEM.

Grossmann, M. T., Golçalves, A. S., & Ponte, J. P. (2009). Um enquadramento do sentido de símbolo no 3.º ciclo. *Atas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (p. 547). Braga: Universidade do Minho.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1981). *Effective evaluation*. São Francisco, CA: Jossey Bass.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lopes, V. (2010). *A Utilização de materiais didáticos no ensino da Matemática ao nível do ensino secundário de Timor-Leste*. Tese de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Lüdke, M., & André, M. (2005). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Ministério da Educação – Direção Geral do Ensino Básico e Secundário (ME-DGEBS) (1991). *Programa de matemática. Plano de organização do ensino-aprendizagem (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: INCM.

Ministério da Educação – Gabinete de Avaliação Educacional (ME-GAVE) (2006). *Projecto 1001 Itens: Álgebra e Funções (3.º ciclo do ensino básico)*. (disponível em http:// http://www.gave.min-edu.pt/np3/109.html)

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.5-17). New York, NY: Routledge.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grows, D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York, NY: MacMillan.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotherdam: Sense.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). NCTM.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathemathics:* 11-16 (pp. 102-119). London: Murray.

Lima, R., & Tall, D. (2006). The concept of equations: What have students met before?. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 233-240). Prague.

Lima, R., & Tall, D. (2010). An example of the fragility of a procedural approach to solving equations. (Versão Draft). Retirado em 29 de Junho de 2013 de http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010x-lima-quadratics-draft.pdf

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*, 113-120.

Matos, A., & Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8.º ano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11* (2), 195-231.

Ministério da Educação (2008). Decreto-Lei 3/2008, de 7 de Janeiro, Diário da República – I Série, N.º 4.

Nabais, M. (2010). *Equações do 2.º grau: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar* (M. Melo, Trad.). Lisboa: APM.

NCTM (2010). *Principles and standards of school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Neves, M., Silva, A., Raposo, M., & Silva, J. (2011). *Matematicamente 8 – Parte 2*. Porto: Porto Editora.

Perrenoud, P. (1999). Formar professores em contextos sociais em mudança, Prática reflexiva e participação crítica (tradução de Denise Barbara Catani). In *Revista Brasileira de Educação, 12*, 5-12. Acedido em 29 de Junho de 2013, em http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1999/1999_34.html#Heading3.

Pesquita, I. (2007). *Álgebra e pensamento algébrico de alunos do 8.º Ano.* Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas* (L. Moreira, Trad.). Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática, 4*(8), 149-170.

Ponte, J. P. (2005a). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85*, 36-42.

Ponte, J. P. (2005b). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Lisboa: ME/DGIDC.

Ponte, J., & Serrazina, L. (2009). O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática, 105*, 2-6.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério de Educação/DGIDC.

Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa (2012/2015). Retirado em 28 de Junho de 2013 de http://agrupamentofernandopessoa.pt/PEA2012-2015.pdf

Radford, L. (2006). Elementos de una teoria cultural de la objetivación. *Relime, Número Especial*, 103-129.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: Porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coords.), *Avaliação das aprendizagens: Das concepções às práticas* (pp. 77-84). Lisboa: ME, DEB.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan.

Serrazina, M. L. (1991). Aprendizagem da Matemática: a importância da utilização de materiais. *Noesis*, *21*, 37-38.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10(4)*, 313-340.

Stewart, I. (1995). *Os problemas da matemática*. Lisboa: Gradiva.

Vaiyavutjamai, P., Ellerton, N. F., & Clements, K. (2005). Students' attempts to solve two elementary quadratic equations: A study in three nations. Retirado em 9 de Maio de 2013 de http://www.merga.net.au/documents/RP852005.pdf

Vale, I., Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática, 85*, 14-22.

Van Ameron, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *55*(1), 63-75.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167-181.

Anexos

Anexo 1

Planificação da 1.ª aula

Lições nº 103 **e** 104 **Data/Hora:** 4-Mar-2013/ 10:05 – 11:35 **Sala:** 8 **Turma:** 8º 3ª

Tópicos/Subtópicos:

Sólidos geométricos - Área de superfície de polígonos;
Sequências e regularidades. Equações - Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita.

Sumário:

Realização e discussão da tarefa de exploração: “Quem tem razão?”.

Objetivos específicos:

Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica;
Resolver equações literais em ordem a uma incógnita;
Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação;
Resolver equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita;

Com o desenrolar da tarefa pretendo recordar conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- Conhecer as propriedades e as regras das operações em Q e usá-las no cálculo;
- Calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais;
- Resolver problemas que envolvam polígonos e as respetivas características e áreas;
- Decomposição de polígonos;
- Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra;
- Simplificar expressões algébricas;
- Máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum;
- Isometrias.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Tarefa “Quem tem razão?” a negro;
Papel e lápis;
Calculadora;
Manual.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;
Resolução de problemas;
Comunicação matemática;
Estabelecimento de conexões;
Autorregulação das aprendizagens;
Mecanismos de verificação;
Sentido de responsabilidade;
Sentido crítico;
Argumentação sustentada;
Autonomia.

Metodologia de trabalho:

Trabalho a pares.

Desenvolvimento da aula:

(1) Início da aula: número das lições e data (escritos no quadro) e sumário (ditado); (*3 minutos*)

(2) Apresentação/Distribuição da tarefa; (*10 minutos*)

(3) Exploração da tarefa por parte dos alunos; (*30 minutos*)

(4) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*45 minutos*)

(5) Escrever o TPC no quadro (continuação da resolução dos problemas da p.158 do manual) e informar os alunos de que caso já tenham acabado a tarefa anterior, podem começar a resolver o TPC. (*2 minutos*)

Avaliação:

A avaliação reguladora e não sumativa será feita, através, de observação direta:

- Do interesse, empenho, desempenho, sociabilidade e adesão às tarefas propostas;
- Da capacidade raciocínio e comunicação (o aluno ter a capacidade de interpretar, expressar um plano para resolver o problema, formular conjeturas e argumentar, justificando as suas respostas);

Pedagogia diferenciada (NEE/ estratégias de remediação/ planos de recuperação/ planos de desenvolvimento)**:**

- Ter atenção aos registos efetuados por estes alunos.

Desenvolvimento da aula:

❖ <u>Distribuição e apresentação da tarefa e definição da metodologia de trabalho</u> (*10 minutos*)

A aula terá início com a proposta de realização da tarefa de exploração "Quem tem razão?".

Depois de distribuído o documento da tarefa, será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de "repavimentar" e de "losangos", nomeadamente, as suas características, e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é apresentar argumentos que mostrem que tanto a mãe como o pai da Carla têm razão e calcular a largura de um dos mosaicos do chão da cozinha da Carla, sabendo a área da parte pintada, de um dos mosaicos.

Explica-se aos alunos que podem recorrer às estratégias (de resolução do problema) que acharem pertinente e deve ficar claro que têm de apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como, a estratégia que usaram, não esquecendo a resposta ao problema.

Informa-se que serão valorizadas as apresentações de diferentes estratégias de resolução do problema e que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 30 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.

❖ <u>Realização da Tarefa</u> (*30 minutos*)

Pede-se aos alunos que respondam às questões na própria folha da tarefa e informa-se que poderão utilizar a calculadora e recorrer, se necessário, ao manual.

Os alunos fazem trabalho autónomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 10 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e fazer um ponto de situação e a cada 5 minutos, o professor deve alertar os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa.

A realização de problemas com equações envolvendo áreas tem sido o foco das últimas aulas, pelo que se espera um envolvimento dos alunos na tarefa. A forma como está estruturado o enunciado permite aos alunos identificar os dados do problema que são importantes considerar, assim espera-se que os alunos interpretem que:

- Comprimento do mosaico = 1,25 x largura do mosaico, logo o mosaico tem a forma de um retângulo;
- Cada mosaico tem como padrão um losango e meio.

❖ Algumas das possíveis resoluções da Tarefa – alínea a – mostrar que a mãe tem razão:

Hipótese 1 – Aplicando a fórmula da área do losango:

c – comprimento do mosaico; l – largura do mosaico; D – comprimento da diagonal maior do losango; d – comprimento da diagonal menor do losango;

$$c = 1{,}25\, l$$

$$A_{losango} = \frac{D \times d}{2} = \frac{1{,}25l \times \frac{2}{3}l}{2} = \frac{5}{12}l^2$$

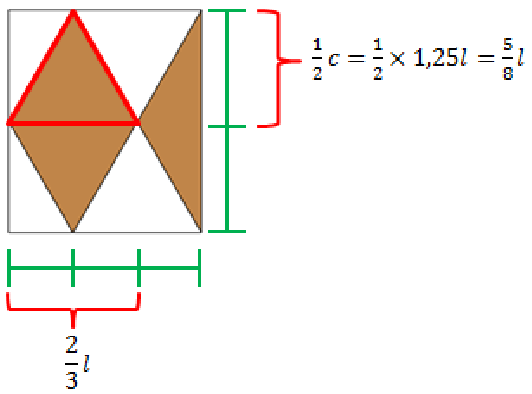
Então,

$$A_{parte\ pintada} = \frac{5}{12}l^2 + \frac{\frac{5}{12}l^2}{2} = \frac{5}{12}l^2 + \frac{5}{24}l^2 = \frac{5}{8}l^2$$
$$= \frac{5}{8}\ do\ quadrado\ da\ medida\ da\ largura\ do\ mosaico$$

R: A mãe da Carla tem razão, porque cinco oitavos do quadrado da medida da largura do mosaico é o mesmo que cinco oitavos de l^2.

Hipótese 2 – Decompondo o losango em triângulos:

c – comprimento do mosaico; l – largura do mosaico; b – base do triângulo vermelho; a – altura do triângulo vermelho;



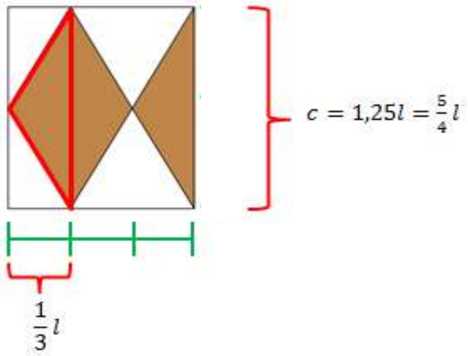
$$A_{triangulo\ vermelho} = \frac{b \times a}{2} = \frac{\frac{2}{3}l \times \frac{5}{8}l}{2} = \frac{5}{24}l^2$$

Então,

$$A_{parte\ pintada} = A_{triangulo\ vermelho} \times 3 = \frac{5}{24}l^2 \times 3 = \frac{15}{24}l^2 = \frac{8}{5}l^2$$

R: A mãe da Carla tem razão, porque cinco oitavos do quadrado da medida da largura do mosaico é o mesmo que cinco oitavos de l^2.

Hipótese 3 – Decompondo o losango em triângulos:
Esta proposta de resolução é análoga à anterior, o que difere é apenas a forma como se decompõe a figura.



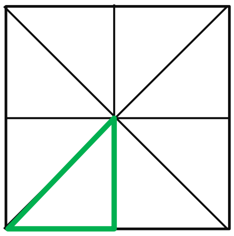
$$A_{triangulo\ vermelho} = \frac{b \times a}{2} = \frac{\frac{5}{4}l \times \frac{1}{3}l}{2} = \frac{5}{24}l^2$$

Então,

$$A_{parte\ pintada} = A_{triangulo\ vermelho} \times 3 = \frac{5}{24}l^2 \times 3 = \frac{15}{24}l^2 = \frac{8}{5}l^2$$

R: A mãe da Carla tem razão, porque cinco oitavos do quadrado da medida da largura do mosaico é o mesmo que cinco oitavos de l^2.

Hipótese 4 – Usando um quadrado de lado l :
Mosaico quadrado, com o lado = l :

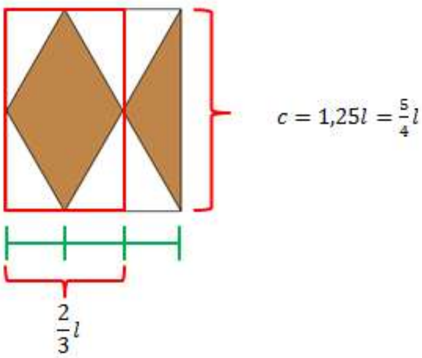


$$A_{triangulo\ verde} = \frac{b \times a}{2} = \frac{\frac{1}{2}l \times \frac{1}{2}l}{2} = \frac{1}{8}l^2$$

Então,

Cinco oitavos do mosaico quadrado $= 5 \times A_{triangulo\ verde} = 5 \times \frac{1}{8}l^2 = \frac{5}{8}l^2$
R: A mãe da Carla tem razão.

Hipótese 5 – Fazendo relação entre áreas:
c – comprimento do mosaico; l – largura do mosaico;



$$A_{losango} = \frac{A_{retângulo\ vermelho}}{2} = \frac{c \times l}{2} = \frac{\frac{5}{4}l \times \frac{2}{3}l}{2} = \frac{5}{12}l^2$$

$$\frac{A_{losango}}{2} = \frac{\frac{5}{12}l^2}{2} = \frac{5}{24}l^2$$

Então,

$$A_{parte\ pintada} = A_{losango} + \frac{A_{losango}}{2} = \frac{5}{12}l^2 + \frac{5}{24}l^2 = \frac{8}{5}l^2$$

R: A mãe da Carla tem razão.

❖ Algumas das possíveis resoluções da Tarefa – alínea a – mostrar que o pai tem razão:

Hipótese 1 – Usando o argumento da mãe prova o argumento do pai:

c – comprimento do mosaico; l – largura do mosaico;

$c = 1{,}25\, l$

$$A_{mosaico} = c \times l = 1{,}25l \times l = 1{,}25l^2 = \frac{5}{4}l^2$$

Então,

$$A_{parte\ pintada} = metade\ da\ área\ do\ mosaico = \frac{A_{mosaico}}{2} = \frac{\frac{5}{4}l^2}{2} = \frac{5}{8}l^2$$

R: O pai da Carla também tem razão, porque a área pintada do mosaico é metade da área total do mosaico.

Hipótese 2 – Partindo da área da parte não pintada do mosaico:

c – comprimento do mosaico; l – largura do mosaico;

$c = 1{,}25\, l$

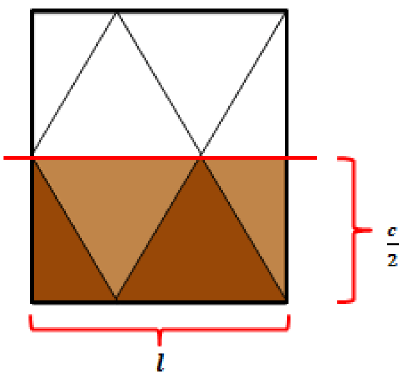
$$A_{mosaico} = c \times l = 1{,}25l \times l = 1{,}25l^2 = \frac{5}{4}l^2$$

$$A_{\tilde{N}\ pintada} = A_{mosaico} - A_{pintada} = \frac{5}{4}l^2 - \frac{5}{8}l^2 = \frac{10}{8}l^2 - \frac{5}{8}l^2 = \frac{5}{8}l^2$$

R: Como a área da parte não pintada é igual à área da parte pintada, então a área pintada do mosaico é metade da área total do mosaico, logo o pai da Carla também tem razão.

Hipótese 3 – Recorrendo à simetria de reflexão:

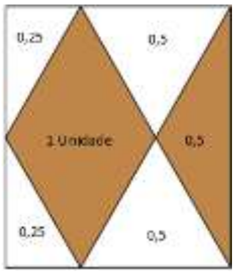
Se pudéssemos recortar a figura poderíamos reconstrui-la da seguinte forma:



R: O pai da Carla também tem razão, porque a área pintada do mosaico é metade da área total do mosaico.

Hipótese 4 – Geometricamente:

Suponhamos que a $A_{losango} = 1$ Unidade.



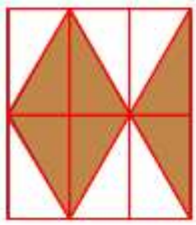
$A_{parte\ pintada} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5\ unidades$

$A_{parte\ \text{não}\ pintada} = 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}5\ unidades$

R: Como ambas as áreas são iguais, então a área pintada é metade da área do mosaico, logo o pai da Carla também tem razão.

Hipótese 5 – Geometricamente:

Dividindo o mosaico em 12 triângulos retângulos escalenos (semelhantes e congruentes):



R: Obtemos seis triângulos pintados e seis triângulos brancos. Sabemos também que as áreas desses triângulos são iguais, então a área pintada é metade da área do mosaico, logo o pai da Carla também tem razão.

❖ <u>Algumas das possíveis resoluções da Tarefa – alínea b</u>:

Hipótese 1 – Algebricamente:

$A_{parte\ pintada} = 5{,}625dm^2 = 562{,}5cm^2$

Pelo enunciado de a) sabemos que:

$$A_{parte\ pintada} = \frac{5}{8}l^2 \Leftrightarrow 562{,}5 = \frac{5}{8}l^2 \Leftrightarrow l^2 = \frac{562{,}5 \times 8}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow l^2 = \frac{4500}{5} \Leftrightarrow l^2 = 900 \Leftrightarrow l = \sqrt{900} \Leftrightarrow l = 30\ cm$$

R: A largura de um dos mosaicos do chão da cozinha da Carla é 30 centímetros.

Nota:

(1) Os alunos podem optar por só reduzir para centímetros no final, neste caso, obteríamos ... $\Leftrightarrow l^2 = 9 \Leftrightarrow l = \sqrt{9} \Leftrightarrow l = 3\ dm \Leftrightarrow l = 30\ cm$;

(2) Os alunos poderão desenvencilhar-se da raiz quadrada por tentativa erro.

Hipótese 2 – Algebricamente, mas utilizado um sistema:

Esta proposta de resolução é muito semelhante à anterior.

Os alunos poderão optar por esta resolução porque "os sistemas" foi a última matéria a ser lecionada.

$$\begin{cases} A_{parte\ pintada} = 5{,}625\ dm^2 \\ A_{parte\ pintada} = \dfrac{5}{8} l^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \textit{Aplicando o método de substituição} \\ \textit{e os princípios de equivalência} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A_{parte\ pintada} = 5{,}625\ dm^2 \\ l = 3dm = 30cm \end{cases}$$

R: A largura de um dos mosaicos do chão da cozinha da Carla é 30 centímetros.

❖ Dificuldades na Tarefa – alínea a:

- Pode haver dificuldade na passagem da "área pintada é igual a $\frac{5}{8}$ do quadrado da medida da largura do mosaico" para a linguagem matemática. Para ultrapassar esta dificuldade deve confrontar-se o par da seguinte forma: "Quanto é o quadrado de 3?" e desta forma espera-se que o par responda 3^2. O objetivo é levar os alunos a compreenderem que ambas as expressões têm o mesmo significado.

- Os alunos poderão ter dificuldades em perceber o que significa da fração $\frac{5}{8}$. Para ultrapassar esta dificuldade podemos questionar o par: "O que significa $\frac{5}{8}$ de uma folha de papel A4?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem que a fração representa a parte de um todo, podendo assim considerá-la como sendo mais uma representação de quantidade, ou seja, uma representação numérica.

- Alguns pares podem não saber como calcular a área de um losango. Para ultrapassar esta dificuldade podemos sugerir aos alunos para decompor o losango. O objetivo é levar os alunos a compreenderem que um losango pode dividir-se, por exemplo, em triângulos. E talvez seja mais fácil saber qual é a área de um triângulo.

- Alguns pares podem afirmar que a área do losango é o comprimento da diagonal maior vezes o comprimento da diagonal menor. Para ultrapassar esta dificuldade pode questionar-se os alunos da seguinte forma: "Qual é a área de um retângulo com a largura igual ao comprimento da diagonal menor e o comprimento igual à diagonal maior?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem que a área do um losango é metade da área de um retângulo cujos lados possuem o mesmo tamanho das diagonais do losango, e portanto, a área de qualquer losango é o semiproduto dos comprimentos das suas diagonais.
- Se a maioria dos alunos achar que só a mãe ou só o pai tem razão. Para ultrapassar esta dificuldade podemos sugerir aos alunos para ler a última frase da alínea a) ("…mostrem que ambos têm razão").

- Pode haver dificuldades em saber qual a medida do comprimento da diagonal menor do losango do mosaico. Para ultrapassar esta dificuldade deve confrontar-se o par da seguinte forma: "Quais as características das diagonais do losango?". O objetivo é levar os alunos a relembrar essas características, como por exemplo, que as suas diagonais são bissetrizes. E através desta característica estabelecer uma relação com a largura do mosaico.

- Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais; (2) simplificar expressões algébricas; (3) determinar o máximo divisor comum e o (4) mínimo múltiplo comum, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

❖ Dificuldades na Tarefa – alínea b:

Nota: Depois de ultrapassadas as dificuldades da alínea a) esta alínea terá menos dificuldades.

- Os alunos poderão ter alguma dificuldade em fazer a redução de dm^2 para cm^2. Para ultrapassar esta dificuldade podemos devolver esta questionar à turma, de modo a, que seja a turma a responder.

- Alguns pares poderão ter dificuldades em desenvencilhar-se da raiz quadrada (matéria estudada no 7.º ano). Para ultrapassar esta dificuldade podemos questionar os pares da seguinte forma: "3 x 3 = 9 certo? Então quanto é a raiz quadrada de 9?" ou "900 é um quadrado perfeito? Qual a relação entre os quadrados perfeitos e a raiz quadrada?". O objetivo é ajudar os pares a dar significado e a estabelecer conexão entre os quadrados perfeitos e as raízes quadradas.

- Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais; (2) simplificar expressões algébricas; (3) determinar o máximo divisor comum e o (4) mínimo múltiplo comum, deve-se questioná-los da seguinte forma: “Já consultaste o manual?”. O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

❖ Discussão e síntese da Tarefa (*45 minutos*)

Neste momento pede-se aos alunos que parem de trabalhar.

O professor deve pedir a alguns alunos que tenham estratégias, as mais variadas possíveis, para irem ao quadro escreve-las e explicá-las à turma (de preferência um de cada vez, mas se houver falta de tempo irão ao quadro dois alunos de cada vez). Caso só surja uma ou duas estratégias (tanto para a mãe como para o pai) o professor deve mostrar mais estratégias possíveis à turma.

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: “Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?”, “Como é que ele(a) pensou?” “Qual foi o ponto de partida?”, entre outras.

Como forma de ligação à apresentação de outra estratégia, o professor poderá colocar a questão: “Alguém utilizou outra estratégia?”.

Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. A maioria das questões servirão de síntese e de um revisitar dos conhecimentos já estudados (quer neste ano letivo, assim como, nos anos letivos anteriores).

Após a discussão da alínea b) o professor deve questionar os alunos da seguinte forma: “Turma, estamos perante uma equação de que grau?”. Desta a forma o professor começa, de uma forma muito suave e subtil, a introduzir o próximo capítulo a lecionar.

Como forma de concluir esta tarefa, o professor poderá “pegar” na solução da alínea b) e perguntar à turma: (1) “Que valores ao quadrado podem dar 9?”. O objetivo é levar os alunos a compreenderem que existem duas soluções para a equação de 2.º grau da alínea b). (2) “Se há duas soluções possíveis porque escolhemos apenas uma delas?”. O objetivo é levar os alunos a compreenderem o significado do +3 e do -3, no contexto deste problema. (3) “Então uma equação do 2.º grau possível e determinada pode ter quantas soluções?”. O objetivo é levar os alunos a compreenderem a relação entre o expoente e as soluções de uma equação do 2.º grau possível e determinada.

❖ Extensão da Tarefa

Como extensão desta tarefa o professor poderá, sempre que achar oportuno, aproveitar momentos na discussão da tarefa, em grande-grupo, para fazer um *refresh* dos conceitos já trabalhados, nomeadamente:
- As propriedades e as regras das operações em Q;
- O uso de expressões numéricas que envolvam números racionais;
- Os polígonos e as respetivas características e áreas;
- As diversas decomposições de polígonos;
- Os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra;
- A simplificação de expressões algébricas;
- O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum;
- As diversas isometrias;

entre outros que possam surgir.

Planificação da 2.ª aula

Lições nº 111 **e** 112 **Data/Hora:** 4-Abr-2013/ 11:45 – 13:15 **Sala:** 8 **Turma:** 8º 3ª

Sumário:

Realização e discussão das tarefas: “A vedação do terreno” e “Escalas de temperatura”.
Início do estudo das equações literais.

Nota: A tarefa “Escalas de temperatura” não faz parte deste estudo.

Tópicos/Subtópicos:

Sólidos geométricos - Áreas de superfícies e perímetros de polígonos;
Sequências e regularidades. Equações - Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita;
Sequências e regularidades. Equações - Equações literais.

Objetivos específicos da tarefa: “A vedação do terreno”:

Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica;
Resolver equações literais em ordem a uma incógnita;
Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação;
Resolver equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita;

Com o desenrolar das tarefas pretendo recordar conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- Conhecer as propriedades e as regras das operações em Q e usá-las no cálculo;
- Calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais;
- Resolver problemas que envolvam polígonos e as respetivas características, e também, as respetivas áreas e perímetros;
- Decomposição de polígonos;
- Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra;
- Princípios e regras para a resolução de equações;
- Simplificar expressões algébricas;
- Método de substituição e os princípios de equivalência nos sistemas;
- Máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum.

Objetivos específicos da tarefa: “Escalas de temperatura” (Manual – pg. 182 e 183)**:**

Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra;
Simplificar expressões algébricas;
Resolver equações literais em ordem a uma das incógnitas;
Com o desenrolar das tarefas pretendo recordar conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- Conhecer as propriedades e as regras das operações em Q e usá-las no cálculo;
- Calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais;
- Representação de números racionais por dízimas infinitas periódicas;
- Arredondamento de dízimas finitas e dízimas infinitas periódicas;
- Princípios e regras para a resolução de equações;
- Máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum;
- Distinguir dados de natureza qualitativa de dados de natureza quantitativa, discreta ou contínua;
- Interpretar os resultados que decorram da organização e representação de dados;
- Função afim.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Tarefa “A vedação do terreno” a negro;
Manual;
Papel e lápis;
Calculadora.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;
Resolução de problemas;
Comunicação matemática;
Estabelecimento de conexões;
Autorregulação das aprendizagens;
Mecanismos de verificação;
Sentido de responsabilidade;
Sentido crítico;
Argumentação sustentada;
Autonomia.

Metodologia de trabalho:

Exploração das tarefas a pares e discussões em grande grupo.

Desenvolvimento da aula:

(1) Início da aula: número das lições e data (escritos no quadro) e sumário (ditado); (*3 minutos*)
(2) Apresentação/Distribuição da tarefa: "A vedação do terreno"; (*5 minutos*)
(3) Exploração da tarefa por parte dos alunos; (*15 minutos*)
(4) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*25 minutos*)
(5) Apresentação da tarefa do manual: "Escalas de temperatura"; (*5 minutos*)
(6) Exploração das questões 1, 2, 3 e 4 da tarefa por parte dos alunos; (*15 minutos*)
(7) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*20 minutos*)
(8) Escrever o TPC no quadro (continuação da resolução da tarefa da p.182-183 do manual). (*2 minutos*)

Avaliação:

A avaliação reguladora e não sumativa será feita, através, de observação direta:

- Do interesse, empenho, desempenho, sociabilidade e adesão às tarefas propostas;
- Da capacidade raciocínio e comunicação (o aluno ter a capacidade de interpretar, expressar um plano para resolver o problema, formular conjeturas e argumentar, justificando as suas respostas);

Pedagogia diferenciada (NEE/ estratégias de remediação/ planos de recuperação/ planos de desenvolvimento)**:**

- Ter atenção aos registos efetuados por estes alunos.

Desenvolvimento da aula:

Tarefa: "A vedação do terreno"

❖ Distribuição e apresentação da tarefa e definição da metodologia de trabalho (*5 minutos*)

A aula terá início com a proposta de realização da tarefa "A vedação do terreno".

Depois de distribuído o documento da tarefa, será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de "quadrilátero" e "vedado", e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é calcular o valor mínimo de rede, em metros, que será necessário comprar para vedar o terreno.

Explica-se aos alunos que podem recorrer às estratégias (de resolução do problema) que acharem pertinente e deve ficar claro que têm de apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como, a estratégia que usaram, não esquecendo a resposta ao problema.

Informa-se que serão valorizadas as apresentações de diferentes estratégias de resolução do problema e que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 15 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.

❖ Realização da tarefa "A vedação do terreno" (*15 minutos*)

Pede-se aos alunos que respondam às questões na própria folha da tarefa e informa-se que poderão utilizar a calculadora e recorrer, se necessário, ao manual.

Os alunos fazem trabalho autónomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 5 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e fazer um ponto de situação e a cada 5 minutos, o professor deve alertar os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa.

A realização de problemas com equações envolvendo áreas foi o foco, em parte, das últimas aulas do 2.º período, pelo que se espera um envolvimento dos alunos na tarefa. A forma como está estruturado o enunciado permite aos alunos identificar os dados do problema que são importantes considerar, assim espera-se que os alunos interpretem que:

- O terreno é retangular, devido às características descritas no enunciado;
- O terreno tem de área 1200 m^2;
- Largura do terreno = $\frac{1}{3}$ x comprimento do terreno;
- O terreno vai ser vedado, logo é necessário calcular o seu perímetro (em metros), mas não esquecendo a existência de um portão com 260 cm de largura.

❖ Algumas das possíveis resoluções da tarefa "A vedação do terreno":

Hipótese 1 – Usando uma tabela e fixando o comprimento:

Os pares podem recorrer a uma resolução em tabela, fixando o comprimento do terreno e definindo a largura como está descrita no enunciado da tarefa ("…largura é a terça parte do comprimento.").

	c = **comprimento**	l = **largura =** $\frac{1}{3}$ **x comprimento**	**Área do terreno =** c **x** l
	…	…	…
Hipótese 1	30	10	300
Hipótese 2	40	40/3	533,(3)
Hipótese 3	50	50/3	833,(3)
Hipótese 4	60	20	1200

$P_{terreno} = 2c + 2l = 2 \times 60 + 2 \times 20 = 160\ m$

$Vedação\ do\ terreno = P_{terreno} - largura\ do\ portão = 160 - 2{,}6 = 157{,}4\ m$

R: Terão de comprar, no mínimo, 157,4 metros de rede.

Hipótese 2 – Usando uma tabela e fixando a largura:

Esta proposta de resolução é muito semelhante à anterior.

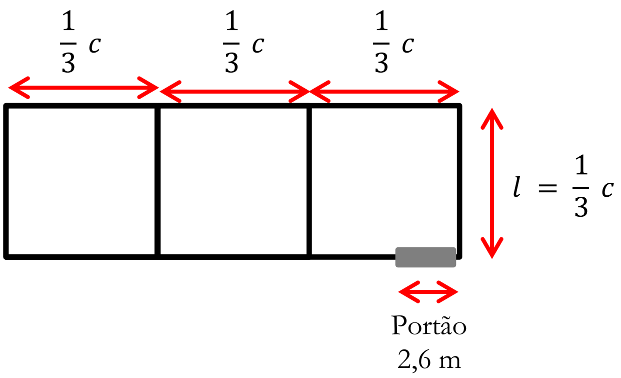
Os pares podem recorrer a uma resolução em tabela, fixando a largura do terreno e definindo o comprimento como o tripo da medida da largura.

	l = **largura**	c = **comprimento = 3 x largura**	**Área do terreno =** c **x** l
	…	…	…
Hipótese 1	5	15	75
Hipótese 2	10	30	300
Hipótese 3	15	45	675
Hipótese 4	20	60	1200

$P_{terreno} = 2c + 2l = 2 \times 60 + 2 \times 20 = 160\ m$
$Vedação\ do\ terreno = P_{terreno} - largura\ do\ portão = 160 - 2{,}6 = 157{,}4\ m$
R: Terão de comprar, no mínimo, 157,4 metros de rede.

Hipótese 3 – Algebricamente, mas usando a área de quadrados:

$A_{terreno} = 1200\ m^2$;
c – comprimento do terreno;
l – largura do terreno;
Como $l = \frac{1}{3}c$, então o terreno pode dividir-se em 3 quadrados congruentes;



Se o terreno vai ser vedado com rede, deixando um portão com 260 cm de largura, então é necessário calcular o perímetro do terreno e excluir os 260 cm;

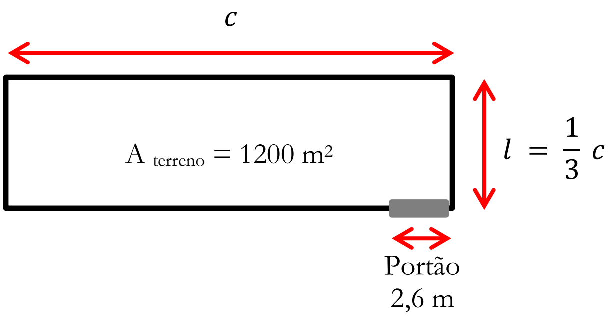
$$A_{terreno} = 3 \times A_{\blacksquare} \Leftrightarrow 1200 = 3 \times l^2 \Leftrightarrow 1200 = 3 \times \left(\frac{1}{3}c\right)^2 \Leftrightarrow 1200 = 3 \times \frac{1}{9}c^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1200 = \frac{1}{3}c^2 \Leftrightarrow c^2 = 3600 \Leftrightarrow c = \sqrt{3600} \Leftrightarrow c = 60\ m$$

$l = \frac{1}{3}c = \frac{1}{3} \times 60 = 20\ m$
$P_{terreno} = 8l = 8 \times 20 = 160\ m$
$Vedação\ do\ terreno = P_{terreno} - largura\ do\ portão = 160 - 2{,}6 = 157{,}4\ m$
R: Terão de comprar, no mínimo, 157,4 metros de rede.

Nota: Os alunos poderão desenvencilhar-se da raiz quadrada por tentativa erro.

Hipótese 4 – Algebricamente, mas usando a área de um retângulo:

$A_{terreno} = 1200\ m^2$;
c – comprimento do terreno;
l – largura do terreno;
Como $l = \frac{1}{3}c$, então o terreno tem a forma de um retângulo;
Se o terreno vai ser vedado com rede, deixando um portão com 260 cm de largura, então é necessário calcular o perímetro do terreno retangular e excluir os 260 cm;



$$A_{terreno} = c \times l \Leftrightarrow 1200 = c \times \frac{1}{3}c \Leftrightarrow 1200 = \frac{1}{3}c^2 \Leftrightarrow c^2 = 1200 \times 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^2 = 3600 \Leftrightarrow c = \sqrt{3600} \Leftrightarrow c = 60\ m$$

$l\ = \frac{1}{3}\ c = \frac{1}{3} \times 60 = 20\ m$
$P_{terreno} = 2c + 2l = 2 \times 60 + 2 \times 20 = 160\ m$
$Vedação\ do\ terreno = P_{terreno} - largura\ do\ portão = 160 - 2{,}6 = 157{,}4\ m$
R: Terão de comprar, no mínimo, 157,4 metros de rede.

Hipótese 5 – Algebricamente, mas utilizado um sistema:
Esta proposta de resolução é muito semelhante à anterior.
Os alunos poderão optar por esta resolução porque "os sistemas" foi uma das últimas matérias a serem lecionadas.

$$\begin{cases} A_{terreno} = 1200\ m^2 \\ A_{terreno} = c \times l \end{cases} \underset{e\ os\ princípios\ de\ equivalência}{\overset{Aplicando\ o\ método\ de\ substituição}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} A_{terreno} = 1200\ m^2 \\ c = 60cm \end{cases}$$

$l\ = \frac{1}{3}\ c = \frac{1}{3} \times 60 = 20\ m$
$P_{terreno} = 2c + 2l = 2 \times 60 + 2 \times 20 = 160\ m$
$Vedação\ do\ terreno = P_{terreno} - largura\ do\ portão = 160 - 2{,}6 = 157{,}4\ m$
R: Terão de comprar, no mínimo, 157,4 metros de rede.

❖ Dificuldades na tarefa "A vedação do terreno":

- Pode haver dificuldade na passagem da "largura é a terça parte do comprimento" para a linguagem matemática. Para ultrapassar esta dificuldade deve confrontar-se o par da seguinte forma: "Quanto é a terça parte de 6?" e desta forma espera-se que o par responda 2. O objetivo é levar os alunos a compreenderem que ambas as expressões têm o mesmo significado.

- Os alunos poderão ter dificuldades em perceber o que significa "a terça parte", ou seja, a fração $\frac{1}{3}$. Para ultrapassar esta dificuldade podemos questionar o par: "O que significa $\frac{1}{3}$ de uma folha de papel A4?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem que a fração representa a parte de um todo, podendo assim considerá-la como sendo mais uma representação de quantidade, ou seja, uma representação numérica.

- Alguns pares podem não saber como calcular a área do terreno. Para ultrapassar esta dificuldade podemos sugerir aos alunos para decompor o terreno. O objetivo é levar os alunos a compreenderem que um terreno retangular pode dividir-se, por exemplo, em quadrados. E talvez seja mais fácil saber qual é a área de um quadrado.

- Se a maioria dos pares achar que "é necessário comprar 160 metros de rede para vedar o terreno" devemos confrontar a turma com este resultado. Caso a turma concorde com o resultado devemos pedir à turma para voltar a ler o enunciado.

- Os alunos poderão ter alguma dificuldade em fazer a redução de cm para m. Para ultrapassar esta dificuldade podemos devolver esta questionar à turma, de modo a, que seja a turma a responder.

- Alguns pares poderão ter dificuldades em desenvencilhar-se da raiz quadrada (matéria estudada no 7.º ano). Para ultrapassar esta dificuldade podemos questionar os pares da seguinte forma: "6 x 6 é igual a? Então quanto é a raiz quadrada de 36?" ou "3600 é um quadrado perfeito? Qual a relação entre os quadrados perfeitos e a raiz quadrada?". O objetivo é ajudar os pares a dar significado e a estabelecer conexão entre os quadrados perfeitos e as raízes quadradas.

- Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais; (2) simplificar expressões algébricas; (3) aplicar os princípios de equivalência; (4) determinar o máximo divisor comum e o (5) mínimo múltiplo comum, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

❖ Discussão e síntese da tarefa "A vedação do terreno" (*25 minutos*)

Neste momento pede-se aos alunos que parem de trabalhar.

O professor deve pedir a alguns alunos que tenham estratégias, as mais variadas possíveis, para irem ao quadro escreve-las e explicá-las à turma (de preferência um de cada vez, mas se houver falta de tempo irão ao quadro dois alunos de cada vez). Caso só surja uma estratégia de resolução o professor deve mostrar mais estratégias possíveis à turma.

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: "Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?", "Como é que ele(a) pensou?" "Qual foi o ponto de partida?", entre outras.

Como forma de ligação à apresentação de outra estratégia, o professor poderá colocar a questão: "Alguém utilizou outra estratégia?".

Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. A maioria das questões servirão de síntese e de um revisitar dos conhecimentos já estudados (quer neste ano letivo, assim como, nos anos letivos anteriores).

Após a discussão da tarefa o professor deve questionar os alunos da seguinte forma: "Turma, estamos perante uma equação de que grau?". Assim o professor começa, de uma forma muito suave e subtil, a introduzir o próximo capítulo a lecionar.

Como forma de concluir esta tarefa, o professor poderá "pegar na $\sqrt{3600}$" e perguntar à turma: (1) "Que valores ao quadrado podem dar 3600?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem que existem duas soluções para a equação de 2.º grau da tarefa. (2) "Se há duas soluções possíveis porque escolhemos apenas uma delas?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem o significado do +60 e do -60, no contexto deste problema. (3) "Então uma equação do 2.º grau possível e determinada pode ter quantas soluções?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem a relação entre o expoente e as soluções de uma equação do 2.º grau possível e determinada.

❖ Extensão da tarefa "A vedação do terreno"

Como extensão desta tarefa o professor poderá, sempre que achar oportuno, aproveitar momentos na discussão da tarefa, em grande-grupo, para fazer um *refresh* dos conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- As propriedades e as regras das operações em Q;
- O uso de expressões numéricas que envolvam números racionais;
- Os polígonos e as respetivas características, áreas e perímetros;
- As diversas decomposições de polígonos;
- Os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra;
- Os princípios e regras para a resolução de equações;
- A simplificação de expressões algébricas;
- O método de substituição e os princípios de equivalência nos sistemas;
- O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum;

entre outros que possam surgir.

Planificação da 3.ª aula

Lições nº 128 **e** 129 **Data/Hora:** 29-Abr-2013 / 10:05 – 11:35 **Sala:** 8 **Turma:** 8º 3ª

Sumário:

Realização e discussão da tarefa: "À descoberta de números…".
Lei do anulamento do produto. Exercícios.

Tópicos/Subtópicos:

Sequências e regularidades. Equações:

- Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita;
- Lei do anulamento do produto.

Objetivos específicos da tarefa 3: "À descoberta de números…" (Manual – pg. 206)**:**

Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica;
Resolver equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, através da lei do anulamento do produto;

NOTA: Alguns alunos poderão resolver a questão 6b) utilizando a noção de raiz quadrada, apesar de não ser este o objetivo desta aula.

Com o desenrolar das tarefas pretendo recordar conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- Conhecer as propriedades e as regras das operações em $\mathbb{R}$ e usá-las no cálculo;
- Perceber os diferentes símbolos usuais em Álgebra (Por exemplo: $\pm$; $\neq$; $\Leftrightarrow$;$\vee$);
- Princípios e regras para a resolução de equações;
- Simplificar expressões algébricas;
- Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação;
- Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios;
- Decomposição de um polinómio em fatores.

Objetivos específicos da tarefa 4: "Aplico o que aprendi – I":

Resolver equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, através da lei do anulamento do produto;
Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica;

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Tarefa 3 e 4, a negro;
Manual;
Papel e lápis.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;
Resolução de problemas;
Comunicação matemática.

Metodologia de trabalho:

Exploração das tarefas a pares e discussões em grande grupo.

Desenvolvimento da aula:

(1) Início da aula: número das lições e data (ditado ou escrito no quadro) e sumário (ditado); (*3 minutos*)

(2) Apresentação da tarefa: "À descoberta de números…" do manual (pg. 206) e distribuição da folha onde os alunos responderão à tarefa; (*5 minutos*)

(3) Exploração da tarefa por parte dos alunos; (*5 + 10 minutos*)

(4) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*25 minutos*)
(5) Distribuição/Apresentação da tarefa 4: "Aplico o que aprendi - I"; (*5 minutos*)
(6) Exploração da tarefa por parte dos alunos; (*15 minutos*)
(7) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*20 minutos*)
(8) Escrever o TPC no quadro (p.210 do manual, ex.: 2). (*2 minutos*)

Avaliação:
A avaliação reguladora e não sumativa será feita, através, de observação direta e registo informal:
- Do interesse, empenho, desempenho, sociabilidade e adesão às tarefas propostas;
- Da capacidade raciocínio e comunicação (o aluno ter a capacidade de interpretar, expressar um plano para resolver o problema, formular conjeturas e argumentar, justificando as suas respostas);

Pedagogia diferenciada (NEE/ estratégias de remediação/ planos de recuperação/ planos de desenvolvimento)**:**
- Ter atenção aos registos efetuados por estes alunos.

Desenvolvimento da aula:

Tarefa: "À descoberta de números…"

❖ Distribuição da folha de resoluções, apresentação da tarefa e definição da metodologia de trabalho. (*5 minutos*)

A aula terá início com a proposta de realização da tarefa "À descoberta de números…" do manual (pg.206).

Depois de distribuída a folha de resoluções para a tarefa, será pedido aos alunos para a resolverem a caneta.

Explica-se aos alunos que podem recorrer às estratégias de resolução que acharem pertinente e deve ficar claro que têm de apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como, a estratégia que usaram, não esquecendo as respostas aos problemas.

Informa-se que serão valorizadas as apresentações de diferentes estratégias de resolução e que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 15 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.

❖ Realização da tarefa "À descoberta de números…". (*5 + 10 minutos*)

Os alunos fazem trabalho autónomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 5 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e fazer um ponto de situação (discutindo em grande grupo as questões 1, 2, 3 e 4, e deve escrever a lei do anulamento do produto no quadro) e só depois os alunos resolverão as restantes questões. O professor deve alertar os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa (10 minutos).

A realização de exercícios e problemas sobre os casos notáveis da multiplicação de binómios e sobre a decomposição de um polinómio em fatores foi o foco das últimas aulas, pelo que se espera um envolvimento dos alunos na tarefa.

❖ Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da tarefa "À descoberta de números":

Questão 1:
- Hipótese 1:
Os pares podem verificar facilmente que $3 \times (-2) = -6 \neq 0$.

R.: O Miguel não podia ter pensado nos números 3 e -2, porque o produto destes números não dá o valor zero.

- Dificuldade na hipótese 1:
Erro de sinais, que será facilmente ultrapassado. Basta questionar a turma: “$3 \times (-2)$?”, de modo a, que seja a turma a responder.

- Hipótese 2 – Algebricamente:
Sejam x e y ($\in \mathbb{R}$) os números que o Miguel pensou.
Se $x \times y = 0$,
Então $x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ x \ e \ y = 0$ (porque o Miguel podia ter pensado em números iguais).

R.: O Miguel não podia ter pensado nos números 3 e -2, porque nenhum deles é igual a zero.

<u>NOTA</u>: Penso que os alunos não sentirão necessidade de resolver esta questão algebricamente. Caso não surja, não haverá problema, porque será falado na discussão da questão 2 e/ou 3 e, também, fará parte da síntese desta tarefa.

- Dificuldades na hipótese 2:
Passagem da linguagem natural (“Pensei em dois números”) para a linguagem algébrica. Questionar o par: “Sabem em que números o Miguel pensou?” e desta forma espera-se que o par responda “Não”. O objetivo é levar os alunos a sentir a necessidade de utilizar letras para definir os números pensados pelo Miguel.

Resolver a equação ($x \times y = 0$) e atribuir-lhe significado ($x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ x \ e \ y = 0$). Questionar o par: “Quando é que um produto pode ser zero?”, “Qual é o elemento absorvente da multiplicação?” e desta forma espera-se que o par responda “zero”. O objetivo é levar os alunos a perceber que um dos números em que o Miguel pensou tem de ser, obrigatoriamente, o zero.

Questão 2:
- Hipótese 1:
R.: Por exemplo, 0 e -1.

- Dificuldades na hipótese 1:
Não se espera dificuldades.

Questão 3:
- Hipótese 1:
R.: Por exemplo, 0 e 0; 0 e 1; -2 e 0; 0 e 100.

- Dificuldades na hipótese 1:
Não se espera dificuldades.

Questão 4:
- Hipótese 1:
R.: Pelo menos um dos números em que o Miguel pensou é zero.

- Dificuldades na hipótese 1:
Não se espera dificuldades.

Questão 5:
- Hipótese 1:
Os pares podem chegar aos números pensados pela Catarina por tentativa erro.
R.: A Catarina pensou no número 2 ou no número -3, para o produto dar zero.

- Dificuldade na hipótese 1:

Pode haver dificuldade na passagem do "produto da diferença entre ele e 2 pela sua soma com 3" para a linguagem matemática. Para ultrapassar esta dificuldade deve confrontar-se o par da seguinte forma: "Explica-me por palavras tuas o que está dito no enunciado.", "Quais as operações matemáticas que pensas estarem envolvidas no enunciado?", "Qual é a operação matemática para o produto? Diferença? E para a soma?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

- Hipótese 2 – Algebricamente:

Sejam x ($\in \mathbb{R}$) o número que a Catarina pensou.

$(x-2)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=2 \ \vee \ x=-3$

Solução da equação: C.S.$=\{-3;2\}$

R.: A Catarina pensou no número 2 ou no número -3, para o produto dar zero.

NOTA: Penso que os alunos sentirão necessidade de resolver esta questão algebricamente, porque têm resolvido problemas desta natureza, nas últimas aulas.

- Dificuldades na hipótese 2:

Passagem da linguagem natural ("Pensei num número") para a linguagem algébrica. Questionar o par: "Sabem em que número a Catarina pensou?" e desta forma espera-se que o par responda "Não". O objetivo é levar os alunos a sentir a necessidade de utilizar uma letra para definir o número pensado pela Catarina.

Pode haver dificuldade na passagem do "produto da diferença entre ele e 2 pela sua soma com 3" para a linguagem algébrica. Para ultrapassar esta dificuldade deve confrontar-se o par da seguinte forma: "Explica-me por palavras tuas o que está dito no enunciado.", "Quais as operações matemáticas que pensas estarem envolvidas no enunciado?", "Qual é a operação matemática para o produto? Diferença? E para a soma?", "O que significa o produto ser nulo?", "De que forma é que um produto dá 0?". O professor poderá dar exemplos com números propriamente ditos, como por exemplo: "Como podes escrever a diferença entre 3 e 2?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

Resolver a equação $[(x-2)(x+3)=0]$ e atribuir-lhe significado $[x-2=0 \vee x+3=0]$. Questionar o par: "Quando é que um produto pode ser nulo?", "Qual é o elemento absorvente da multiplicação?" e desta forma espera-se que o par responda "$x-2$ ou $x+3$ terá de ser zero". O objetivo é levar os alunos a perceber que irão obter dois números possíveis para a Catarina.

Questão 6 a):

- Hipótese 1:

Os pares podem chegar aos números pensados pelo José por tentativa erro.

R.: O José pensou nos números 0 e 6 ou -4 e 2.

- Dificuldade na hipótese 1:

Pode haver dificuldade na passagem do enunciado para a linguagem matemática. Para ultrapassar esta dificuldade deve confrontar-se o par da seguinte forma: "O que significa exceder um número em 6 unidades?", "Qual é a operação matemática para o produto?", "O que é o dobro de 3?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

- Hipótese 2 – Algebricamente:

Sejam x e $x+6$ ($\in \mathbb{R}$) os números pensados pelo José.

$$\begin{aligned} x(x+6)=2x &\Leftrightarrow x^2+6x-2x=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+4x=0 \\ &\Leftrightarrow x(x+4)=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=-4 \end{aligned}$$

Solução da equação: C.S.$=\{-4;0\}$

R.: O José pensou nos números 0 e 6 ou -4 e 2.

- Hipótese 3 – Algebricamente:

Sejam x e $x+6$ ($\in \mathbb{R}$) os números pensados pelo José.

$$\begin{aligned} x(x+6) = 2x &\Leftrightarrow x(x+6) - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x+6-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -4 \end{aligned}$$

Solução da equação: C.S.= $\{-4; 0\}$

R.: O José pensou nos números 0 e 6 ou -4 e 2.

NOTA: Penso que os alunos sentirão necessidade de resolver esta questão algebricamente, porque têm resolvido problemas desta natureza, nas últimas aulas.

- Dificuldades na hipótese 2 e 3:

Passagem da linguagem natural ("Pensei em dois números") para a linguagem algébrica. Questionar o par: "Sabem em que números o José pensou?" e desta forma espera-se que o par responda "Não". O objetivo é levar os alunos a sentir a necessidade de utilizar uma letra para definir os números pensados pelo José.

Pode haver dificuldade na passagem do enunciado para a linguagem algébrica. Para ultrapassar esta dificuldade deve confrontar-se o par da seguinte forma: "O que significa exceder um número em 6 unidades?", "Em quantas unidades excede o número 7 do número 4?", "Qual é a operação matemática para o produto?", "O que é o dobro de 3?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

Pode haver dificuldade em perceber que existe a solução da equação e a solução do problema. Para ultrapassar esta dificuldade deve questionar-se o par da seguinte forma: "Em quantas unidades excede o número 0 do número -4?" e desta forma espera-se que o par responda "4 unidades". O objetivo é levar os alunos a perceber que ainda não responderam ao problema.

Questão 6 b):

- Hipótese 1:

Os pares podem chegar aos números, a que a Marta se refere, por tentativa erro.

R.: A Marta refere-se ao número 5 ou -5.

- Dificuldade na hipótese 1:

Pode haver dificuldade na passagem do enunciado para a linguagem matemática. Para ultrapassar esta dificuldade deve confrontar-se o par da seguinte forma: "Qual é a operação matemática para a diferença?", "O que é o triplo de 2? E o quadrado de 3?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

- Hipótese 2 – Algebricamente:

Seja x ($\in \mathbb{R}$) o número a que a Marta se refere.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 75 = 0 &\Leftrightarrow 3(x^2 - 25) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+5)(x-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+5 = 0 \ \vee \ x-5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -5 \ \vee \ x = 5 \end{aligned}$$

Solução da equação: C.S.= $\{-5; 5\}$

R.: A Marta refere-se ao número 5 ou -5.

- Hipótese 3 – Algebricamente:

Seja x ($\in \mathbb{R}$) o número a que a Marta se refere.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 75 = 0 &\Leftrightarrow 3(x^2 - 25) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x^2 - 5^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x+5)(x-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + 15 = 0 \ \vee \ x - 5 = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x = -5 \ \vee \ x = 5$

Solução da equação: C.S.= $\{-5; 5\}$

R.: A Marta refere-se ao número 5 ou -5.

- Hipótese 4 – Algebricamente:

Seja x ($\in \mathbb{R}$) o número a que a Marta se refere.

$$3x^2 - 75 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 75$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25}$$
$$\Leftrightarrow x = -5 \ \vee \ x = 5$$

Solução da equação: C.S.= $\{-5; 5\}$

R.: A Marta refere-se ao número 5 ou -5.

NOTA: Penso que os alunos sentirão necessidade de resolver esta questão algebricamente, porque têm resolvido problemas desta natureza, nas últimas aulas. E é muito provável que optem pela hipótese 4 (utilizando a noção de raiz quadrada), porque lhes é mais familiar.

- Dificuldades nas hipóteses 2, 3 e 4:

Passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. Questionar o par: "Sabem a que número a Marta se refere?" e desta forma espera-se que o par responda "Não". O objetivo é levar os alunos a sentir a necessidade de utilizar uma letra para definir os números a que se refere a Marta.

Pode haver dificuldade na passagem do enunciado para a linguagem algébrica. Para ultrapassar esta dificuldade deve confrontar-se o par da seguinte forma: "Qual é a operação matemática para a diferença?", "O que é o triplo de 2? E o quadrado de 3? Como podes escreve-los matematicamente?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

Na hipótese de resolução 4, alguns pares poderão ter dificuldades em desenvencilhar-se da raiz quadrada (matéria estudada no 7.º ano). Para ultrapassar esta dificuldade podemos questionar os pares da seguinte forma: "3 x 3 é igual a? Então quanto é a raiz quadrada de 9?", "Que números ao quadrado dão 9?" ou "9 é um quadrado perfeito? Qual a relação entre os quadrados perfeitos e a raiz quadrada?". O objetivo é ajudar os pares a dar significado e a estabelecer conexão entre os quadrados perfeitos e as raízes quadradas.

DIFICULDADES GERAIS: Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; (3) utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios; (4) decompor um polinómio em fatores e (5) aplicar os princípios de equivalência, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

❖ Discussão e síntese da tarefa "À descoberta de números" (*25 minutos*)

Após os primeiros 5 minutos de realização da tarefa pelos alunos, o professor para o trabalho autónomo e passa à discussão em grande grupo das primeiras 4 questões da tarefa.

O professor deve pedir a alguns alunos que tenham estratégias, as mais variadas possíveis (mas, aquelas que o professor achar que vão acrescentar, mais alguma, aprendizagem aos alunos), para irem ao quadro escreve-las e explicá-las à turma (de preferência um de cada vez, mas se houver falta de tempo irão ao quadro dois alunos de cada vez). Caso só surja uma estratégia de resolução o professor deve mostrar mais estratégias possíveis à turma (focando-se sempre no objetivo principal da aula – Lei do anulamento do produto), pedindo sempre aos alunos para escreverem as novas estratégias no caderno e não na folha distribuída no início da aula, para a resolução da tarefa do manual.

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: "Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?", "Como é que ele(a) pensou?", entre outras.

Como forma de ligação à apresentação de outra estratégia, o professor poderá colocar a questão: “Alguém utilizou outra estratégia?” ou “Alguém resolveu de outra forma?”.

Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. A maioria das questões servirão de síntese e de um revisitar dos conhecimentos já estudados (quer neste ano letivo, assim como, nos anos letivos anteriores).

Sempre que seja oportuno o professor deve questionar os alunos da seguinte forma: “Turma, estamos perante uma equação de que grau? Porquê?”, “Turma, estamos esta equação é completa? Porquê?”, “Então uma equação do 2.º grau possível e determinada pode ter quantas soluções?”, entre outras.

Após a discussão das 4 primeiras questões, o professor escreverá no quadro, pedindo a participação da turma, e pedirá aos alunos para registarem no caderno a seguinte síntese:

Lei do anulamento do produto:

Um produto é nulo se e só se pelo menos um dos fatores for nulo.

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$$

Por exemplo:

$$x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \qquad \text{C.S.} = \{0; 1\}$$

NOTA: Isto deverá ficar escrito no quadro até ao final da aula, como forma de ajudar os alunos a resolver as restantes questões da tarefa e a próxima tarefa.

De seguida, o professor pedirá à turma para resolver as restantes questões da tarefa. Passados os restantes 10 minutos de trabalho autónomo, serão discutidas e corrigidas as restantes questões (o discurso do professor será análogo ao discurso descrito anteriormente).

Tarefa: “Aplico o que aprendi - I”

- Distribuição e apresentação da tarefa 4 “Aplico o que aprendi - I” e definição da metodologia de trabalho. (*5 minutos*)

A segunda parte da aula terá início com a proposta de realização da tarefa “Aplico o que aprendi – I”.

Depois de distribuída a tarefa, será pedido aos alunos para a resolverem a caneta e será feita a leitura da questão 1 por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir que a turma perceba que terá de resolver as equações através da lei do anulamento do produto.

Informa-se que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para explicar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 15 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.

- Realização da tarefa 4 “Aplico o que aprendi – I”. (*15 minutos*)

Pede-se aos alunos que respondam às questões da tarefa no próprio enunciado e informa-se que poderão recorrer ao manual.

Os alunos fazem trabalho autónomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 2 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e fazer um ponto de situação questionando a turma: “Turma, qual é o conjunto de solução da primeira equação?" e a cada 5 minutos, o professor deve alertar os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa.

❖ Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da tarefa 4 "Aplico o que aprendi – I":

Questão 1:
- Dificuldades na questão 1:
Alguns alunos poderão aplicar a distributiva e não "ligar" ao que é pedido na questão, apesar de ter sido lida em voz alta. Para ultrapassar esta dificuldade devemos sugerir que leiam o enunciado com mais atenção.

Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; (3) utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios; (4) decompor um polinómio em fatores e (5) aplicar os princípios de equivalência, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

Questão 1 a):
- Hipótese 1:
$\boldsymbol{x(x+2)=0} \Leftrightarrow x=0 \vee x+2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$
Solução da equação: C.S.= $\{-2;0\}$

Questão 1 b):
- Hipótese 1:
$$\boldsymbol{(2c+1)\left(c-\frac{1}{3}\right)=0} \Leftrightarrow 2c+1=0 \vee c-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow c=-\frac{1}{2} \vee c=\frac{1}{3}$$
Solução da equação: C.S.= $\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right\}$

Questão 1 c):
- Hipótese 1:
$\boldsymbol{-x^2-3x=0} \Leftrightarrow x(-x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee -x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-3$
Solução da equação: C.S.= $\{-3;0\}$
- Hipótese 2:
$\boldsymbol{-x^2-3x=0} \Leftrightarrow -x(x+3)=0 \Leftrightarrow -x=0 \vee x+3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-3$
Solução da equação: C.S.= $\{-3;0\}$

Questão 1 d):
- Hipótese 1:
$\boldsymbol{3z^2=12z} \Leftrightarrow 3z^2-12z=0 \Leftrightarrow z(3z-12)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee 3z-12=0$
$\Leftrightarrow z=0 \vee z=4$
Solução da equação: C.S.= $\{0;4\}$
- Hipótese 2:
$\boldsymbol{3z^2=12z} \Leftrightarrow 3z^2-12z=0 \Leftrightarrow 3z(z-4)=0 \Leftrightarrow 3z=0 \vee z-4=0$
$\Leftrightarrow z=0 \vee z=4$
Solução da equação: C.S.= $\{0;4\}$
- Hipótese 3:
$\boldsymbol{3z^2=12z} \Leftrightarrow 12z-3z^2=0 \Leftrightarrow z(12-3z)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee 12-3z=0$
$\Leftrightarrow z=0 \vee z=4$
Solução da equação: C.S.= $\{0;4\}$
- Hipótese 4:
$\boldsymbol{3z^2=12z} \Leftrightarrow 12z-3z^2=0 \Leftrightarrow 3z(4-z)=0 \Leftrightarrow 3z=0 \vee 4-z=0$
$\Leftrightarrow z=0 \vee z=4$
Solução da equação: C.S.= $\{0;4\}$

Questão 1 e):
- Hipótese 1:

$$(\boldsymbol{y}-\mathbf{3})(\mathbf{2}+\mathbf{7}\boldsymbol{y})=\mathbf{0} \Leftrightarrow y-3=0 \vee 2+7y=0 \Leftrightarrow y=3 \vee y=-\frac{2}{7}$$

Solução da equação: C.S.= $\left\{-\frac{2}{7};3\right\}$

Questão 1 f):

- Hipótese 1:

$$(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}=\mathbf{0} \Leftrightarrow (x+1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \vee x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Solução da equação: C.S.= $\{-1\}$ (solução dupla)

Questão 1 g):

- Hipótese 1:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})+\mathbf{2}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})=\mathbf{0} \Leftrightarrow (x+1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \vee x+2=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-2$$

Solução da equação: C.S.= $\{-2;-1\}$

Questão 1 h):

- Hipótese 1:

$$(\boldsymbol{m}+\mathbf{10})^{\mathbf{2}}=\mathbf{100} \Leftrightarrow m^2+20m+100=100 \Leftrightarrow m^2+20m=0$$
$$\Leftrightarrow m(m+20)=0 \Leftrightarrow m=0 \vee m+20=0 \Leftrightarrow m=0 \vee m=-20$$

Solução da equação: C.S.= $\{-20;0\}$

Questão 1 i):

- Hipótese 1:

$$(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})\boldsymbol{x}=\mathbf{3}(\boldsymbol{x}+\mathbf{4}) \Leftrightarrow (x+4)x-3(x+4)=0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow x+4=0 \vee x-3=0 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=3$$

Solução da equação: C.S.= $\{-4;3\}$

- Hipótese 2:

$$(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})\boldsymbol{x}=\mathbf{3}(\boldsymbol{x}+\mathbf{4}) \Leftrightarrow 3(x+4)-(x+4)x=0 \Leftrightarrow (x+4)(3-x)=0$$
$$\Leftrightarrow x+4=0 \vee 3-x=0 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=3$$

Solução da equação: C.S.= $\{-4;3\}$

Questão 2:

- Hipótese 1:

$$(x+3)(x-2)=0 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$$

- Dificuldades na questão 2:

Alguns alunos poderão sentir dificuldades em criar a equação. Para ultrapassar esta dificuldade devemos sugerir que ao aluno que volte a "olhar" para as equações da questão 1 ou então questionar: "O que identificas como padrão?".

❖ Discussão e síntese das questões da tarefa 4 "Aplico o que aprendi – I" (*20 minutos*)

Neste momento pede-se aos alunos que parem de trabalhar.

Pede-se a alguns alunos que expliquem à turma como pensaram (com registo escrito das resoluções das equações da questão 1 no quadro, pelo professor) promovendo uma discussão mais em torno do raciocínio do que na descoberta das soluções. Caso só surja uma estratégia de resolução o professor deve mostrar mais estratégias possíveis à turma (focando-se sempre no objetivo principal da aula – Lei do anulamento do produto), pedindo sempre aos alunos para escreverem as novas estratégias no caderno e não na folha da tarefa.

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: "Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?", "Como é que ele(a) pensou?", entre outras.

Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. O professor fará notar aos alunos que há equações de 2.º grau a uma incógnita com duas soluções, outras com uma solução e outras sem solução. E informará que para a próxima aula estudar-se-á as equações sem solução, de modo a, criar curiosidade nos alunos.

❖ Registo do TPC no quadro: (*2 minutos*)

Página 210 do manual, ex.: 2.
Quem tiver terminado a tarefa "Aplico o que aprendi – I" poderá começar a realizar o TPC.
NOTA: O objetivo deste exercício é resolver 11 equações, utilizando a lei do anulamento do produto. É um exercício muito semelhante à questão 1 da tarefa 4 "Aplico o que aprendi – I", mas é necessário, porque os alunos precisam de praticar este tipo de resoluções.

❖ Extensão das tarefas:

Como extensão destas tarefas o professor poderá, sempre que achar oportuno, aproveitar momentos na discussão das tarefas, em grande-grupo, para fazer um *refresh* dos conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- As propriedades e as regras das operações em $\mathbb{R}$ e usá-las no cálculo;
- Os diferentes símbolos usuais em Álgebra (Por exemplo: $\pm$; $\neq$; $\Leftrightarrow$;$\vee$);
- Os princípios e regras para a resolução de equações;
- A simplificação de expressões algébricas;
- As operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação;
- A utilização dos casos notáveis da multiplicação de binómios;
- A decomposição de um polinómio em fatores.

entre outros que possam surgir.

Planificação da 4.ª aula

Lições nº 130 **e** 131 **Data/Hora:** 2-Maio-2013 / 11:45 – 13:15 **Sala:** 8 **Turma:** 8º 3ª

Sumário:

Realização e discussão das tarefas: “A queda do foguete” e “As janelas quadradas”.
Resolução de exercícios, utilizando a noção de raiz quadrada.

Tópicos/Subtópicos:

Sequências e regularidades. Equações:

- Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita;
- Lei do anulamento do produto;
- Noção de raiz quadrada.

Objetivos específicos da tarefa 5: “A queda do foguete”:

Compreensão do enunciado da tarefa, de modo a, utilizar a lei do anulamento do produto, para a resolução da equação;
Compreender a diferença entre as soluções da equação e a solução da tarefa;
Fazer a conexão entre as funções e a resolução de equações.

NOTA: Se os alunos se mostrarem interessados poder-se-á ir um pouco mais além nesta tarefa, falando na altura máxima do foguete (máximo da função), nos zeros da função e na caracterização da trajetória do foguete (parábola), de forma a, prepará-los para o futuro.

Com o desenrolar das tarefas pretendo recordar conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- Analisar a função a partir da sua representação;
- Interpretar a variação da função representada pelo seu gráfico, indicando intervalos onde a função é crescente e/ou decrescente, o domínio e o contradomínio no contexto da tarefa;
- Indicar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano;
- Isometrias (eixo de simetria de reflexão na trajetória do foguete);
- Conhecer as propriedades e as regras das operações em $\mathbb{R}$ e usá-las no cálculo;
- Perceber os diferentes símbolos usuais em Álgebra (Por exemplo: $\pm$; $\neq$; $\Leftrightarrow$;$\vee$);
- Princípios e regras para a resolução de equações;
- Simplificar expressões algébricas;
- Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação;
- Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios;
- Decomposição de um polinómio em fatores.

Objetivos específicos da tarefa 6: “As janelas quadradas” (Manual – pg. 207)**:**

Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica;
Resolver equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, utilizando a noção de raiz quadrada;

NOTA: Alguns alunos poderão resolver algumas das alíneas da questão 1 utilizando a diferença de quadrados e depois utilizando a lei do anulamento do produto, apesar de não ser este o objetivo desta tarefa.

Com o desenrolar das tarefas pretendo recordar conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- Conhecer as propriedades e as regras das operações em Q e usá-las no cálculo;
- Propriedades das raízes;
- Calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais;
- Polígonos: as respetivas características e áreas;
- Perceber os diferentes símbolos usuais em Álgebra (Por exemplo: $\pm$; $\neq$; $\Leftrightarrow$;$\vee$);
- Princípios e regras para a resolução de equações;
- Simplificar expressões algébricas;
- Regra de três simples.

Objetivos específicos da tarefa 7: "Aplico o que aprendi – II":

Resolver equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, utilizando a noção de raiz quadrada;

Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica.

Recursos:

Quadro branco e marcador;

Tarefa 5, 6 e 7, a negro;

Manual;

Papel e lápis.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;

Resolução de problemas;

Comunicação matemática.

Metodologia de trabalho:

Exploração das tarefas a pares e discussões em grande grupo.

Desenvolvimento da aula:

(1) Início da aula: número das lições e data (ditado ou escrito no quadro) e sumário (ditado); (*3 minutos*)

(2) Recordar em grande grupo o que foi dado na aula anterior; (*2 minutos*)

(3) Distribuição/Apresentação da tarefa 5: "A queda do foguete"; (*2 minutos*)

(4) Exploração da tarefa por parte dos alunos; (*10 minutos*)

(5) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*20 minutos*)

(6) Apresentação da tarefa 6: "As janelas quadradas" do manual (pg. 207) e distribuição da folha onde os alunos responderão à tarefa; (*2 minutos*)

(7) Exploração da tarefa por parte dos alunos; (*7 minutos*)

(8) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*15 minutos*)

(9) Distribuição/Apresentação da tarefa 7: "Aplico o que aprendi - II"; (*2 minutos*)

(10) Exploração de uma parte da tarefa por parte dos alunos; (*10 minutos*)

(11) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*10 minutos*)

(12) Esclarecimento de dúvidas sobre o TPC da aula anterior (p.210 do manual, ex.: 2). (*5 minutos*)

(13) Escrever o <u>TPC para a próxima segunda-feira</u> no quadro (tarefa 4 – "Aplico o que aprendi – I" e terminar a tarefa 7 – "Aplico o que aprendi – II") e distribuir a tarefa ("À descoberta de números…") da aula anterior corrigida. (*2 minutos*)

Avaliação:

A avaliação reguladora e não sumativa será feita, através, de observação direta e registo informal:

- Do interesse, empenho, desempenho, sociabilidade e adesão às tarefas propostas;
- Da capacidade raciocínio e comunicação (o aluno ter a capacidade de interpretar, expressar um plano para resolver o problema, formular conjeturas e argumentar, justificando as suas respostas);

Pedagogia diferenciada (NEE/ estratégias de remediação/ planos de recuperação/ planos de desenvolvimento)**:**

- Ter atenção aos registos efetuados por estes alunos.

Desenvolvimento da aula:

❖ <u>O recordar da aula anterior</u>. (*2 minutos*)

Recordar em grande grupo o que foi dado na aula anterior, questionando os alunos: "Turma, o que dêmos ontem?". Com a participação dos alunos, o professor deverá escrever no quadro a lei do anulamento do produto seguida de um exemplo com vários fatores (para os alunos não ficarem apegados ao exemplo, com apenas dois fatores, da aula anterior e, também, para reforçar a ideia: quando um produto é 0 pelo menos um dos seus fatores tem de ser 0).

Lei do anulamento do produto:

Um produto é nulo se e só se pelo menos um dos fatores for nulo.

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2(x+2)(x+3)=0 &\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x+2)(x+3)=0\\
&\Leftrightarrow x-1=0 \vee x-1=0 \vee x+2=0 \vee x+3=0\\
&\Leftrightarrow x=1 \vee x=1 \vee x=-2 \vee x=-3
\end{aligned}
$$

C.S.$=\{-3;-2;1\}$

Solução dupla

Tarefa: "A queda do foguete"

❖ <u>Distribuição e apresentação da tarefa 5 "A queda do foguete" e definição da metodologia de trabalho</u>. (*2 minutos*)

A aula terá início com a proposta de realização da tarefa "A queda do foguete".

Depois de distribuído o documento da tarefa, será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de "trajetória" e "$h(t)$", e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é determinar ao fim de quanto tempo o foguete chega ao solo. Será, também, pedido que resolvam a tarefa a caneta.

Explica-se aos alunos que podem recorrer às estratégias (de resolução do problema) que acharem pertinente e deve ficar claro que têm de apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como, a estratégia que usaram, não esquecendo a resposta ao problema.

Informa-se que serão valorizadas as apresentações de diferentes estratégias de resolução do problema e que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 10 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.

❖ <u>Realização da tarefa "A queda do foguete"</u>. (*10 minutos*)

Os alunos fazem trabalho autónomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 3 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e fazer um ponto de situação e também, deve ir alertando os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa.

A realização de exercícios e problemas sobre a decomposição de um polinómio em fatores e sobre a lei do anulamento do produto foi o foco das últimas aulas, pelo que se espera um envolvimento dos alunos na tarefa.

❖ <u>Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da tarefa "A queda do foguete"</u>:

- Hipótese 1 – Tentativa erro:

t	$h(t)$
0	0
1	18
2	30
3	36
4	36
5	30
6	18
7	0

R.: O foguete chega ao solo aos 7 segundos.

- Hipótese 2 – Algebricamente:

$$\begin{aligned} -3t^2 + 21t = 0 &\Leftrightarrow t(-3t + 21) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee -3t + 21 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 7 \end{aligned}$$

Solução da equação: C.S.$= \{0; 7\}$

R.: O foguete chega ao solo aos 7 segundos.

- Hipótese 3 – Algebricamente:

$$\begin{aligned} -3t^2 + 21t = 0 &\Leftrightarrow 3t(-t + 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3t = 0 \vee -t + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 7 \end{aligned}$$

Solução da equação: C.S.$= \{0; 7\}$

R.: O foguete chega ao solo aos 7 segundos.

- Hipótese 4 – Algebricamente:

$$\begin{aligned} -3t^2 + 21t = 0 &\Leftrightarrow -t(3t - 21) = 0 \\ &\Leftrightarrow -t = 0 \vee 3t - 21 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 7 \end{aligned}$$

Solução da equação: C.S.$= \{0; 7\}$

R.: O foguete chega ao solo aos 7 segundos.

- Hipótese 5 – Algebricamente:

$$\begin{aligned} -3t^2 + 21t = 0 &\Leftrightarrow -3t(t - 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow -3t = 0 \vee t - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 7 \end{aligned}$$

Solução da equação: C.S.$= \{0; 7\}$

R.: O foguete chega ao solo aos 7 segundos.

NOTA: Penso que os alunos sentirão necessidade de resolver esta questão algebricamente, porque resolveram equações desta natureza, na última aula.

- Dificuldades nas hipóteses acima indicadas:

Alguns alunos poderão não perceber o que significa $h(t)$, apesar de ter sido esclarecido aquando a leitura do enunciado da tarefa. Para ultrapassar esta dificuldade basta questionar a turma: "Turma, qual o significado de $h(t)$?", de modo a, que seja a turma a responder que a altura varia em função do tempo. Ou então, sugerir que leiam o enunciado com mais atenção.

Alguns pares poderão sentir dificuldades em interpretar qual dos dois resultados obtidos é a resposta à tarefa. Para ultrapassar esta dificuldade basta questionar a turma: "Turma, se lançarmos um foguete e olharmos para o relógio, o que podemos verificar? O que acontece ao tempo?", de modo a, que seja a turma a responder.

Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; (3) decompor um polinómio em fatores; (4) utilizar a lei do anulamento do produto e (5) aplicar os princípios de equivalência, deve-se questioná-los da seguinte forma: “Já consultaste o manual? E a aula de ontem?”. O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

❖ <u>Discussão e síntese da tarefa “A queda do foguete”</u> (*20 minutos*)

Neste momento pede-se aos alunos que parem de trabalhar.

O professor deve pedir a alguns alunos que tenham estratégias, as mais variadas possíveis, para irem ao quadro escreve-las e explicá-las à turma (de preferência duas ou três estratégias distintas, mas se houver falta de tempo irão ao quadro dois alunos em simultâneo). Caso só surja uma estratégia de resolução o professor deve mostrar mais estratégias possíveis à turma (focando-se sempre no objetivo principal da aula – Lei do anulamento do produto), pedindo sempre aos alunos para escreverem as novas estratégias no caderno e não na folha tarefa.

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: “Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?”, “Como é que ele(a) pensou?”, entre outras.

Como forma de ligação à apresentação de outra estratégia, o professor poderá colocar a questão: “Alguém utilizou outra estratégia?” ou “Alguém resolveu de outra forma?”.

Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. A maioria das questões servirão de síntese e de um revisitar dos conhecimentos já estudados (quer neste ano letivo, assim como, nos anos letivos anteriores).

Sempre que seja oportuno o professor deve questionar os alunos da seguinte forma: “Turma, estamos perante uma equação de que grau? Porquê?”, “Turma, estamos esta equação é completa? Porquê?”, “Então uma equação do 2.º grau possível e determinada pode ter quantas soluções?”, entre outras.

Como forma de extensão e conclusão desta tarefa e caso os alunos se mostrarem interessados, o professor poderá ir um pouco mais além nesta tarefa. Projetando uma apresentação em PowerPoint (do diapositivo 1 ao 5) que contêm a representação gráfica da função e da trajetória do foguete (realizada no GeoGebra). E tem como objetivo proporcionar, aos alunos, um lamiré do que irão aprender futuramente.

Durante a apresentação em PowerPoint, o professor questionará os alunos da seguinte forma:

<u>Diapositivo 2</u>:

Antes de mostrar à turma a representação gráfica da função $h(t)$ questiona-se: “Concordam que a representação gráfica da função $h(t)$ seja uma reta?”. O objetivo é fazer os alunos refletirem sobre como será a trajetória de um foguete.

Depois de mostrar à turma a representação gráfica da função $h(t)$, o professor poderá questionar a turma: “A função termina quando h é -50?”, “Este gráfico descreve a trajetória do foguete?”. O objetivo é os alunos perceberem que ao lançar um foguete a altura não pode ser negativa, assim como, o tempo também não pode ser negativo.

<u>Diapositivo 3</u>:

O professor deve questionar os alunos da seguinte forma:

“A função é crescente e/ou decrescente?”
“Qual é a variável dependente e a variável independente? E Porquê?”
“A variável dependente representa-se no eixo das abcissas ou no eixo das ordenadas? E a variável independente?”
“Qual é a altura máxima que pode atingir este foguete?”
“Existe algum eixo de simetria de reflexão?”

“Qual o domínio e o contra domínio desta função?”
Entre outras.

O objetivo destas questões é levar os alunos a relembrar os conceitos estudados e mostrar-lhes que na matemática podemos, sempre, relacionar os temas lecionados com aquele que estamos a lecionar. E ao falar da altura máxima do foguete (máximo da função), dos zeros da função e da caracterização da trajetória do foguete (parábola – é uma secção cónica), tem como objetivo prepará-los para o futuro, mas de uma forma muito suave.

Diapositivo 4 e 5:
Estes dois diapositivos serão apenas mostrados à turma e será informada que a apresentação em PowerPoint irá ficar disponível no moodle da escola. O objetivo destes diapositivos é cativar e motivar os alunos para fazerem este tipo de representações no GeoGebra (é um programa gratuito e em português).

Tarefa: “As janelas quadradas”

❖ Distribuição da folha de resoluções, apresentação da tarefa e definição da metodologia de trabalho. (*2 minutos*)

A segunda parte da aula terá início com a proposta de realização da tarefa “As janelas quadradas” do manual (pg.207).

Depois de distribuída a folha de resoluções para a tarefa, será pedido aos alunos para a resolverem a caneta e será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de “fachada” e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é determinar o lado, em centímetros, de cada um dos vidros quadrados.

Explica-se aos alunos que podem recorrer às estratégias de resolução que acharem pertinente e deve ficar claro que têm de apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como, a estratégia que usaram, não esquecendo a resposta à tarefa

Informa-se que serão valorizadas as apresentações de diferentes estratégias de resolução e que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 7 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.

❖ Realização da tarefa “As janelas quadradas”. (*7 minutos*)

Os alunos fazem trabalho autónomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 3 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e fazer um ponto de situação e o professor deve alertar os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa.

NOTA: Espera-se que a realização desta tarefa seja rápida, porque a utilização da raiz quadrada é mais familiar para estes alunos e porque já estão familiarizados com problemas que envolvam polígonos (as suas respetivas características e áreas).

❖ Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da tarefa “As janelas quadradas”:

- Hipótese 1:
Os pares poderão usar a regra de três simples para obter a área de 1 dos 400 quadrados de vidro:

$$100m^2 \quad - \quad 400\ quadrados\ de\ vidro$$
$$x\,m^2 \quad - \quad 1\ quadrados\ de\ vidro$$

$x = \dfrac{100}{400} = 0{,}25m^2 = 2500cm^2$

Área de cada quadrado de vidro:

$$A_{\blacksquare} = l \times l \Leftrightarrow 2500 = l^2 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{2500} \Leftrightarrow l = \pm 50 \Leftrightarrow l = -50 \vee l = 50$$

Solução da equação: C.S.= $\{-50; 50\}$

R.: O lado de cada vidro mede 50 cm.

- Hipótese 2:

Lado de cada vidro = ? cm

$A_{fachada} = 100m^2$

$A_{fachada} = 400\ quadrados\ de\ vidro$

$A_{Um\ quadrado\ de\ vidro} = \dfrac{100}{400} = \dfrac{1}{4}m^2$

Área de cada quadrado de vidro:

$$A_{\blacksquare} = l \times l \Leftrightarrow l^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow l = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow l = -0{,}5 \vee l = 0{,}5$$

Solução da equação: C.S.= $\{-50; 50\}$

$l = 0{,}5m = 50cm$

R.: O lado de cada vidro mede 50 cm.

- Dificuldades nas hipóteses 1 e 2:

Interpretação do enunciado ("$100m^2$ de fachada corresponde 400 quadrados de vidro") e passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. Questionar o par: "Qual é o significado de 'corresponder'?", "Para fazer três bolos preciso de doze ovos, quantos ovos leva cada bolo?". O objetivo é levar os alunos a atribuir significado matemático ao enunciado da tarefa e levar os alunos a compreenderem que ambas as expressões têm o mesmo significado.

Alguns alunos poderão ter dificuldade em fazer a redução de m^2 para cm^2 ou de m para cm. Para ultrapassar esta dificuldade podemos devolver esta questionar à turma, de modo a, que seja a turma a responder.

Alguns pares poderão ter dificuldades em desenvencilhar-se da raiz quadrada (matéria estudada no 7.º ano). Para ultrapassar esta dificuldade podemos questionar os pares da seguinte forma: "3 x 3? Então quanto é a raiz quadrada de 9?" ou "9 é um quadrado perfeito? Qual a relação entre os quadrados perfeitos e a raiz quadrada?". O objetivo é ajudar os pares a dar significado e a estabelecer conexão entre os quadrados perfeitos e as raízes quadradas.

DIFICULDADES GERAIS: Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; (3) características e área de um quadrado; e (4) aplicar os princípios de equivalência, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

❖ Discussão e síntese da tarefa "As janelas quadradas" (*15 minutos*)

Neste momento pede-se aos alunos que parem de trabalhar.

O professor deve pedir a alguns alunos que tenham estratégias, as mais variadas possíveis, para irem ao quadro escreve-las e explicá-las à turma (de preferência duas estratégias distintas, mas se houver falta de tempo irão ao quadro dois alunos em simultâneo). Caso só surja uma estratégia de resolução o professor deve mostrar mais estratégias possíveis à turma, pedindo sempre aos alunos para escreverem as novas estratégias no caderno e não na folha tarefa.

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução.

Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: "Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?", "Como é que ele(a) pensou?", entre outras.

Como forma de ligação à apresentação de outra estratégia, o professor poderá colocar a questão: "Alguém utilizou outra estratégia?" ou "Alguém resolveu de outra forma?".

Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. A maioria das questões servirão de síntese e de um revisitar dos conhecimentos já estudados (quer neste ano letivo, assim como, nos anos letivos anteriores).

Alguns alunos poderão não sentir a necessidade de colocar a raiz negativa (na solução da equação), porque têm presente que as medidas de comprimentos são sempre números positivos. Perante esta situação o professor deve deixar bem claro a diferença entre a solução da equação e a solução/resposta à tarefa.

Sempre que seja oportuno o professor deve questionar os alunos da seguinte forma: "Turma, estamos perante uma equação de que grau? Porquê?", "Turma, estamos esta equação é completa? Porquê?", "Então uma equação do 2.º grau possível e determinada pode ter quantas soluções?", entre outras.

Como forma de concluir esta tarefa, o professor escreverá no quadro, pedindo a participação da turma, e pedirá aos alunos para registarem no caderno:

Equações do 2.º grau a uma incógnita:

Denomina-se equação do 2.º grau na incógnita x, a equação da forma:
$ax^2 + bx + c = 0 \; com \; a, b, c \in \mathbb{R} \; e \; a \neq 0.$

- Uma equação do 2.º grau diz-se <u>completa</u> quando b e c são diferentes de zero.
  Exemplos: $2x^2 - 9x + 20 = 0$
  $-x^2 + 10x - 16 = 0$

- Uma equação do 2.º grau diz-se <u>incompleta</u> quando b ou c é igual a zero, ou ainda quando ambos são iguais a zero.
  Exemplos: $x^2 - 16 = 0$ $(b = 0)$ $-x^2 - 3x = 0$ $(c = 0)$ $4x^2 = 0$ $(b = c = 0)$

<u>NOTA</u>: O professor deve informar os alunos que as equações do 2.º grau completas só serão dadas no 9.º ano.

Alguns destes exemplos foram retirados das fichas de trabalho dos alunos, com o objetivo de lhes serem mais familiares.

<u>Tarefa: "Aplico o que aprendi - II"</u>

❖ <u>Distribuição e apresentação da tarefa 7 "Aplico o que aprendi - II" e definição da metodologia de trabalho</u>. (*2 minutos*)

A terceira parte da aula terá início com a proposta de realização da tarefa "Aplico o que aprendi – II".

Depois de distribuída a tarefa, será pedido aos alunos para a resolverem a caneta e será feita a leitura da questão 1 por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir que a turma perceba que terá de resolver as equações, de preferência, utilizando a noção de raiz quadrada (isto porque em algumas alíneas da questão 1, os alunos, poderão aplicar a diferença de quadrados e depois utilizar a lei do anulamento do produto) e indicar o conjunto-solução.

Mas como é provável que falte pouco tempo para a aula terminar, o professor deverá pedir aos alunos para começarem pelas questões 1c), e), g), i) e 2. Isto porque estas são as questões em que podem surgir mais dificuldades. E também, porque na aula anterior o professor referiu que nesta aula iriam surgir equações do 2.º grau (incompletas) impossíveis ("E informará que para a próxima aula estudar-se-á as equações sem solução, de modo a, criar curiosidade nos alunos." – Planificação da aula anterior, pg. 14).

NOTA: Se houver tempo os alunos realizarão as restantes alíneas da questão 1 [a), b), d), f) e h)], se não houver tempo ficarão para trabalho de casa.

Informa-se que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para explicar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 10 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.

❖ Realização de algumas questões da tarefa 7 "Aplico o que aprendi – II". (*10 minutos*)

Pede-se aos alunos que respondam às questões da tarefa no próprio enunciado e informa-se que poderão recorrer ao manual.

Os alunos fazem trabalho autónomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 2 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e fazer um ponto de situação questionando a turma: "Turma, qual é o conjunto de solução da primeira equação?" e a cada 5 minutos, o professor deve alertar os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa.

❖ Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da tarefa 7 "Aplico o que aprendi – II":

Questão 1:
- Dificuldades na questão 1:
Alguns alunos poderão descobrir apenas a raiz positiva para cada equação. Para ultrapassar esta dificuldade podemos questionar os pares da seguinte forma: "3 x 3? Então quanto é a raiz quadrada de 9?".

Alguns alunos poderão pesar que existe raiz quadrada de um número negativo. Para ultrapassar esta dificuldade podemos questionar os pares da seguinte forma: "Dêem-me um exemplo de um número que ao quadrado de valor negativo?", "Quando o expoente é par o que acontece?".

Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; (3) utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios (caso os alunos utilizem a lei do anulamento do produto) e (4) aplicar os princípios de equivalência, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

Questão 1 a):
- Hipótese 1 – raiz quadrada:

$\boldsymbol{x^2 = 16} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$

Solução da equação: C.S.= $\{-4; 4\}$

- Hipótese 2 – Lei do anulamento do produto:

$\boldsymbol{x^2 = 16} \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$

Solução da equação: C.S.= $\{-4; 4\}$

- Hipótese 3 – Lei do anulamento do produto:

$\boldsymbol{x^2 = 16} \Leftrightarrow 16 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (4+x)(4-x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$

Solução da equação: C.S.= $\{-4; 4\}$

Questão 1 b):
- Hipótese 1 – raiz quadrada:
$\boldsymbol{-x^2+9=0} \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x=-3 \lor x=3$
Solução da equação: C.S.= $\{-3;3\}$

- Hipótese 2 – Umas das 2 hipóteses de utilizar a Lei do anulamento do produto:
$\boldsymbol{-x^2+9=0} \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=-3 \lor x=3$
Solução da equação: C.S.= $\{-3;3\}$

Questão 1 c):
- Hipótese 1 – raiz quadrada:
$$\boldsymbol{4x^2-25=0} \Leftrightarrow 4x^2=25 \Leftrightarrow x^2=\frac{25}{4} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2} \lor x=\frac{5}{2}$$
Solução da equação: C.S.= $\left\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right\}$

- Hipótese 2 – Umas das 2 hipóteses de utilizar a Lei do anulamento do produto:
$$\boldsymbol{4x^2-25=0} \Leftrightarrow (2x+5)(2x-5)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2} \lor x=\frac{5}{2}$$
Solução da equação: C.S.= $\left\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right\}$

Questão 1 d):
- Hipótese 1 – raiz quadrada:
$$\boldsymbol{9x^2=16} \Leftrightarrow x^2=\frac{16}{9} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{16}{9}} \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3} \lor x=\frac{4}{3}$$
Solução da equação: C.S.= $\left\{-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right\}$

- Hipótese 2 – Umas das 2 hipóteses de utilizar a Lei do anulamento do produto:
$$\boldsymbol{9x^2=16} \Leftrightarrow 9x^2-16=0 \Leftrightarrow (3x+4)(3x-4)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3} \lor x=\frac{4}{3}$$
Solução da equação: C.S.= $\left\{-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right\}$

Questão 1 e):
- Hipótese 1 – raiz quadrada:
$\boldsymbol{x^2+1=0} \Leftrightarrow x^2=-1$ Equação impossível.

Questão 1 f):
- Hipótese 1 – raiz quadrada:
$$\boldsymbol{-4x^2=-100} \Leftrightarrow x^2=\frac{-100}{-4} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{100}{4}} \Leftrightarrow x=-\frac{10}{2} \lor x=\frac{10}{2} \Leftrightarrow x=-5 \lor x=5$$
Solução da equação: C.S.= $\{-5;5\}$

- Hipótese 2 – raiz quadrada:
$$\boldsymbol{-4x^2=-100} \Leftrightarrow x^2=\frac{-100}{-4} \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x=-5 \lor x=5$$
Solução da equação: C.S.= $\{-5;5\}$

- Hipótese 3 – Umas das 2 hipóteses de utilizar a Lei do anulamento do produto:
$\boldsymbol{-4x^2=-100} \Leftrightarrow 100-4x^2=0 \Leftrightarrow (10+2x)(10-2x)=0 \Leftrightarrow x=-5 \lor x=5$
Solução da equação: C.S.= $\{-5;5\}$

Questão 1 g):

- Hipótese 1:

$\mathbf{2x^2 + 13 = 0} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{13}{2}$ Equação impossível.

Questão 1 h):

- Hipótese 1 – raiz quadrada:

$\mathbf{49 = x^2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{49} \Leftrightarrow x = -7 \vee x = 7$

Solução da equação: C.S.= $\{-7; 7\}$

- Hipótese 2 – Umas das 2 hipóteses de utilizar a Lei do anulamento do produto:

$\mathbf{49 = x^2} \Leftrightarrow x^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow (x+7)(x-7) = 0 \Leftrightarrow x = -7 \vee x = 7$

Solução da equação: C.S.= $\{-7; 7\}$

Questão 1 i):

- Hipótese 1 – raiz quadrada:

$$\mathbf{x^2 = 0,01} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{100} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{100}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{10} \vee x = \frac{1}{10}$$

Solução da equação: C.S.= $\left\{-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right\}$

- Hipótese 2 – raiz quadrada:

$\mathbf{x^2 = 0,01} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{0{,}01} \Leftrightarrow x = -0{,}1 \vee x = 0{,}1$

Solução da equação: C.S.= $\{-0{,}1; 0{,}1\}$

- Hipótese 3 – Umas das hipóteses de utilizar a Lei do anulamento do produto:

$\mathbf{x^2 = 0,01} \Leftrightarrow x^2 - 0{,}01 = 0 \Leftrightarrow (x+0{,}1)(x-0{,}1) = 0 \Leftrightarrow x = -0{,}1 \vee x = 0{,}1$

Solução da equação: C.S.= $\{-0{,}1; 0{,}1\}$

Questão 2:

- Hipótese 1:

$x^2 = 81$

- Hipótese 2:

$x^2 - 81 = 0$

- Hipótese 3:

$(x+9)(x-9) = 0$

- Dificuldades na questão 2:

Alguns alunos poderão sentir dificuldades em criar a equação. Para ultrapassar esta dificuldade devemos sugerir que ao aluno que volte a "olhar" para as equações da questão 1 ou então questionar: "O que identificas como padrão?".

❖ Discussão e síntese das questões da tarefa 7 "Aplico o que aprendi – II" (*10 minutos*)

Neste momento pede-se aos alunos que parem de trabalhar.

Pede-se a alguns alunos que expliquem à turma como pensaram (com registo escrito das resoluções das equações da questão 1 no quadro, pelo professor) promovendo uma discussão mais em torno do raciocínio do que na descoberta das soluções. Caso só surja uma estratégia de resolução o professor deve mostrar mais estratégias possíveis à turma (focando-se sempre no objetivo principal desta tarefa – Noção de raiz quadrada), pedindo sempre aos alunos para escreverem as novas estratégias no caderno e não na folha da tarefa.

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: “Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?”, “Como é que ele(a) pensou?”, entre outras.

Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. O professor fará notar aos alunos que há equações de 2.º grau a uma incógnita com duas soluções, outras com uma solução e outras sem solução.

- Esclarecimento de dúvidas sobre o TPC da aula anterior: (*5 minutos*)

Se algum aluno trouxer dúvidas do TPC (Página 210 do manual, ex.: 2) será esclarecido. Se houver tempo a dúvida desse aluno será colocada à turma, para ser a turma a esclarecer esse aluno. Se não houver tempo, essa dúvida poderá ser tirada diretamente com o aluno durante a aula (enquanto os restantes alunos resolvem a tarefa proposta pelo professor), ou no final da aula, ou na pior das hipóteses na aula seguinte.

- Registo do TPC para a próxima segunda-feira no quadro e distribuição da tarefa (“À descoberta de números”) da aula anterior corrigida: (*2 minutos*)

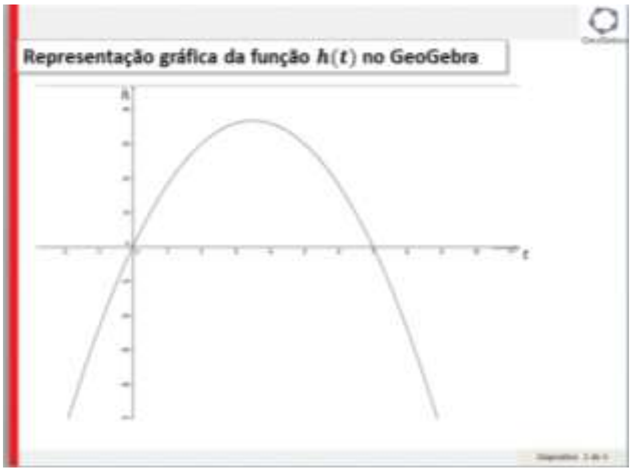
Será distribuída a tarefa recolhida na aula anterior (corrigida) e a tarefa 4 – “Aplico o que aprendi – I”, aos alunos.
Os alunos terão de entregar na segunda-feira as tarefas 4 e 7 (Aplico o que aprendi – I e II) resolvidas. Depois, o professor irá recolhe-las e corrigi-las.

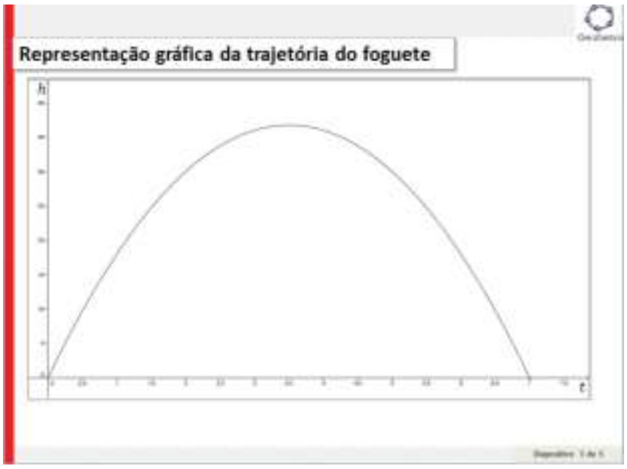
NOTA: O objetivo destas tarefas é resolver equações, utilizando a lei do anulamento do produto e a noção de raiz quadrada. Estas tarefas são necessárias, porque os alunos precisam de praticar este tipo de resoluções.

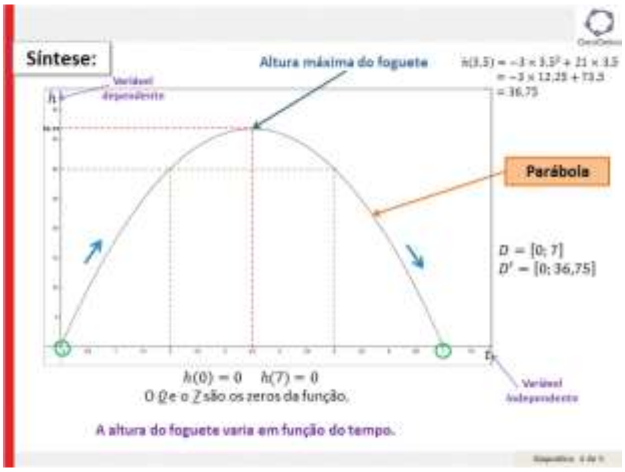
- Extensão das tarefas:

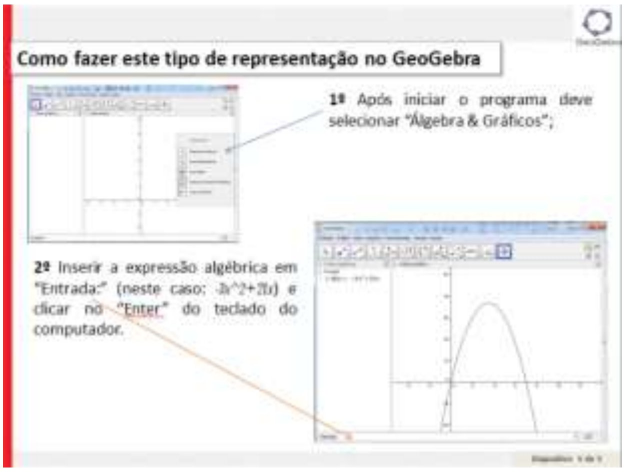
Como extensão destas tarefas o professor poderá, sempre que achar oportuno, aproveitar momentos na discussão das tarefas, em grande-grupo, para fazer um *refresh* nos conceitos já trabalhados e um *upgrade* dos conceitos, nomeadamente, os conceitos descritos nas páginas 1 e 2, entre outros que possam surgir.

PowerPoint utilizado na 4.ª aula









Planificação da 5.ª aula

Lição nº 132 **Data/Hora:** 3-Maio-2013 / 11:45 – 12:30 **Sala:** 8 **Turma:** 8º 3ª

Sumário:

Realização e discussão da tarefa: “Mais desafios – I”.

Tópicos/Subtópicos:

Sequências e regularidades. Equações:

- Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita;
- Lei do anulamento do produto;
- Noção de raiz quadrada.

Objetivos específicos da tarefa 8: “Mais desafios - I”:

Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica;

Resolver equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, utilizando: a lei do anulamento do produto; a decomposição em fatores; os casos notáveis da multiplicação de binómios e/ou a noção de raiz quadrada;

Compreender a diferença entre as soluções da equação e a solução da tarefa.

Com o desenrolar das tarefas pretendo recordar conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- Conhecer as propriedades e as regras das operações em $\mathbb{R}$ e usá-las no cálculo;
- Perceber os diferentes símbolos usuais em Álgebra (Por exemplo: $\pm$; $\neq$; $\Leftrightarrow$;$\vee$);
- Princípios e regras para a resolução de equações;
- Simplificar expressões algébricas;
- Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação;
- Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios;
- Compreender a decomposição de um polinómio em fatores;
- Polígonos: as respetivas características e áreas;
- Decomposição de polígonos;
- Congruências de figuras.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Tarefa 8, a negro;
Manual;
Calculadora;
Papel e lápis.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;
Resolução de problemas;
Comunicação matemática.

Metodologia de trabalho:

Exploração da tarefa a pares e discussão em grande grupo.

Desenvolvimento da aula:

(1) Início da aula: número da lição e data (ditado ou escrito no quadro) e sumário (ditado); (*5 minutos*)

(2) Focar uma situação importante da aula anterior e definir equações do 2.º grau; (5 *minutos*)

(3) Distribuição/Apresentação da tarefa 8: “Mais desafios – I”; (*5 minutos*)

(4) Exploração da tarefa por parte dos alunos; (*15 minutos*)

(5) Discussão e síntese dos resultados obtidos. (*15 minutos*)

Avaliação:
A avaliação reguladora e não sumativa será feita, através, de observação direta e registo informal:

- Do interesse, empenho, desempenho, sociabilidade e adesão às tarefas propostas;
- Da capacidade raciocínio e comunicação (o aluno ter a capacidade de interpretar, expressar um plano para resolver o problema, formular conjeturas e argumentar, justificando as suas respostas);

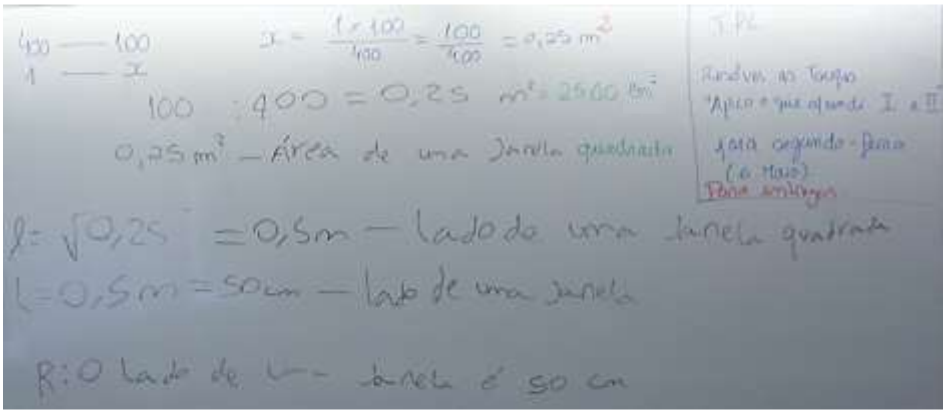
Pedagogia diferenciada (NEE/ estratégias de remediação/ planos de recuperação/ planos de desenvolvimento)**:**

- Ter atenção aos registos efetuados por estes alunos.

Desenvolvimento da aula:

❖ Focar uma situação importante da aula anterior e definir equações do 2.º grau; (*5 minutos*)

O professor projetará a resolução de um aluno no quadro e questionará a turma: "Concordam com o que o está projetado no quadro?"



O objetivo deste slide (diapositivo 1) é mostrar aos alunos que $(-0{,}5)^2$ também é solução da equação. E que é sempre necessário colocarem as duas raízes possíveis, porque se não o fizerem a resolução da equação não está totalmente certa. Mais uma vez é necessário focar a diferença entre solução da equação e solução do problema. (O professor deve pedir aos alunos para registarem no caderno, esta importante alteração).

Posto isto e como forma de conclusão das aulas anteriores, o professor escreverá/projetará no quadro (diapositivo 2), pedindo a participação da turma, e pedirá aos alunos para registarem no caderno:

Equações do 2.º grau a uma incógnita:

Denomina-se equação do 2.º grau na incógnita x, a equação da forma:
$ax^2 + bx + c = 0 \; com \; a, b, c \in \mathbb{R} \; e \; a \neq 0.$

- Uma equação do 2.º grau diz-se <u>completa</u> quando b e c são diferentes de zero.
  Exemplos: $2x^2 - 9x + 20 = 0$
  $-x^2 + 10x - 16 = 0$

- Uma equação do 2.º grau diz-se <u>incompleta</u> quando b ou c é igual a zero, ou ainda quando ambos são iguais a zero.
  Exemplos: $x^2 - 16 = 0$ $(b = 0)$ $-x^2 - 3x = 0$ $(c = 0)$ $4x^2 = 0$ $(b = c = 0)$

<u>NOTA</u>: O professor deve informar os alunos que as equações do 2.º grau completas só serão dadas no 9.º ano.

Alguns destes exemplos foram retirados das fichas de trabalho dos alunos, com o objetivo de lhes serem mais familiares.

Tarefa: "Mais desafios - I"

- Distribuição e apresentação da tarefa 8 "Mais desafios - I" e definição da metodologia de trabalho. (*5 minutos*)

Será distribuída a proposta de realização da tarefa "Mais desafios – I".

Explica-se aos alunos que podem recorrer às estratégias que acharem pertinente e deve ficar claro que têm de apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como, as estratégias que usaram, não esquecendo as respostas aos problemas.

Informa-se que serão valorizadas as apresentações de diferentes estratégias de resoluções dos problemas e que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 15 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.

- Realização da tarefa "Mais desafios - I". (*15 minutos*)

Os alunos fazem trabalho autónomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 3 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e fazer um ponto de situação e também, deve ir alertando os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa.

A realização de exercícios e problemas que impliquem a conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica e, por sua vez, a resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, utilizando: a lei do anulamento do produto; a decomposição em fatores; os casos notáveis da multiplicação de binómios e/ou a noção de raiz quadrada, têm sido o foco das últimas aulas, pelo que se espera um envolvimento dos alunos na tarefa.

- Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da tarefa 8 "Mais desafios - I":

Questão 1:
- Hipótese 1 – Tentativa erro:

Um número possível $\rightarrow x$	x^2	$2x$	$x^2 - 2x$	$5x$	$x^2 - 2x = 5x$
-1	1	-2	$1-(-2)=3$	-5	$3 \neq -5$
0	0	0	0	0	$0 = 0$
1	1	2	-1	5	$-1 \neq 5$
2	4	4	0	10	$4 \neq 10$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	49	14	35	35	$35 = 35$

R.: Esse número pode ser o 0 ou o 7.

- Dificuldades na hipótese 1:

Alguns alunos poderão ter dificuldades na interpretação do enunciado e, por sua vez, na sua passagem para a linguagem algébrica. Questionar os alunos, sempre, com exemplos que contenham números propriamente ditos, como por exemplo: "O que é o quadrado de 2?", "O dobro de 3?", "O quíntuplo de 4?" e "Qual é a operação matemática associada à palavra 'tiras'?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

Alguns alunos poderão encontrar apenas um possível valor para o número desconhecido, neste caso, pode-se questionar os alunos da seguinte forma: "É esse o único valor possível?". O objetivo é despertar-lhes a curiosidade e o espírito de descoberta.

- Hipótese 2 – Algebricamente:

Seja x o possível número,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x = 5x &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 5x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 7x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7 \end{aligned}$$

Solução da equação: C.S.= {0; 7}

R.: Esse número pode ser o 0 ou o 7.

NOTA: Penso que os alunos sentirão necessidade de resolver este problema algebricamente, porque resolveram equações desta natureza, nas últimas aulas.

- Dificuldades na hipótese 2:

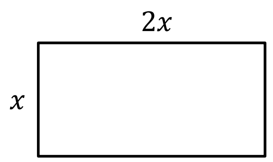
Alguns alunos poderão ter dificuldades na interpretação do enunciado e, por sua vez, na sua passagem para a linguagem algébrica. Questionar os alunos, sempre, com exemplos que contenham números propriamente ditos, como por exemplo: "O que é o quadrado de 2?", "O dobro de 3?", "O quíntuplo de 4?" e "Qual é a operação matemática associada à palavra 'tiras'?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado, de forma a, equacionarem-no.

Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; (3) decompor um polinómio em fatores; (4) utilizar a lei do anulamento do produto e (5) aplicar os princípios de equivalência, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual? E o teu caderno?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

Questão 2:

NOTA: Penso que os alunos não resolveram por tentativa erro, mas sim algebricamente, porque resolveram problemas desta natureza, nas últimas aulas.

- Hipótese 1 – Algebricamente:



$$A_{retângulo} = c \times l = 2x \times x = 2x^2$$

$$P_{retângulo} = 2c + 2l = 4x + 2x = 6x$$

$$\begin{aligned} A_{retângulo} + 18 = 2 \times P_{retângulo} &\Leftrightarrow 2x^2 + 18 = 2 \times 6x \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 - 6x + 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Comprimento do retângulo = 2 x 3 = 6 u.c.

R.: O comprimento do retângulo são 6 unidades de comprimento.

- Hipótese 2 – Algebricamente:

$$A_{retângulo} = c \times l = 2x \times x = 2x^2$$

$$P_{retângulo} = 2c + 2l = 4x + 2x = 6x$$

$$\begin{aligned} A_{retângulo} + 18 = 2 \times P_{retângulo} &\Leftrightarrow 2x^2 + 18 = 2 \times 6x \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 6x + 9) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-3)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-3)(x-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x-6)(x-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x = 6 \vee x = 3$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$

Comprimento do retângulo = 2 x 3 = 6 u.c.
R.: O comprimento do retângulo são 6 unidades de comprimento.

- Dificuldades nas hipóteses 1 e 2:
É espectável que as dificuldades sejam muito semelhantes às da questão 1 e serão ultrapassadas da mesma forma, mas adaptadas a este enunciado.

❖ Discussão e síntese da tarefa 8 "Mais desafios -I" (*15 minutos*)

Neste momento pede-se aos alunos que parem de trabalhar.

O professor deve pedir a alguns alunos que tenham estratégias, as mais variadas possíveis, para irem ao quadro escreve-las e explicá-las à turma (de preferência duas estratégias distintas, mas se houver falta de tempo irão ao quadro os dois alunos em simultâneo). Caso só surja uma estratégia de resolução o professor deve mostrar mais estratégias possíveis à turma (focando-se sempre no objetivo principal da aula – Resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita), pedindo sempre aos alunos para escreverem as novas estratégias no caderno e não na folha tarefa.

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: "Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?", "Como é que ele(a) pensou?" "Qual foi o ponto de partida?", entre outras.

Como forma de ligação à apresentação de outra estratégia, o professor poderá colocar a questão: "Alguém utilizou outra estratégia?" ou "Alguém resolveu de outra forma?".

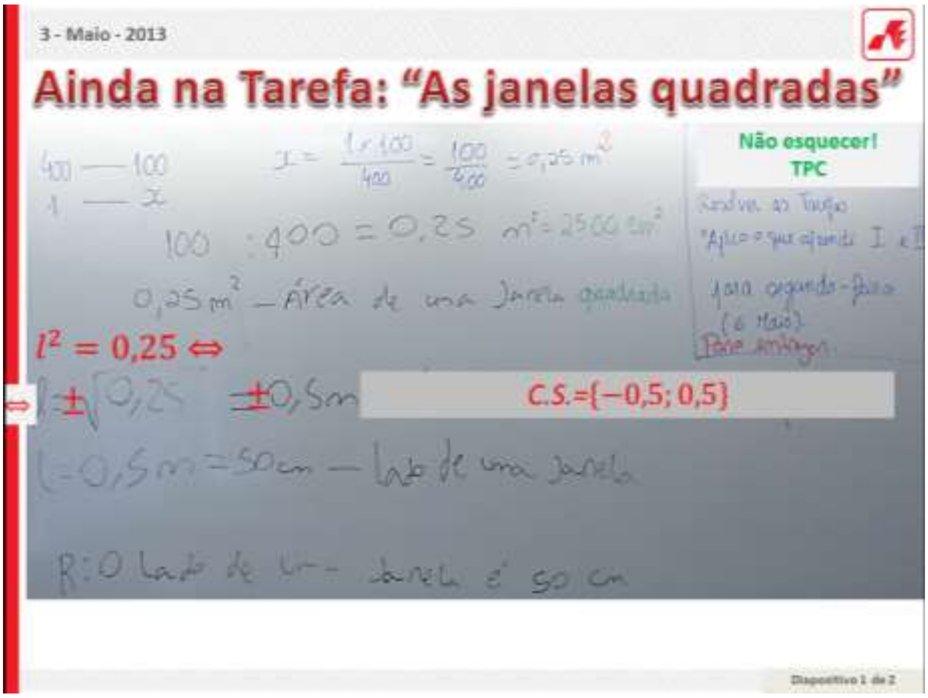
Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. A maioria das questões servirão de síntese e de um revisitar dos conhecimentos já estudados (quer neste ano letivo, assim como, nos anos letivos anteriores).

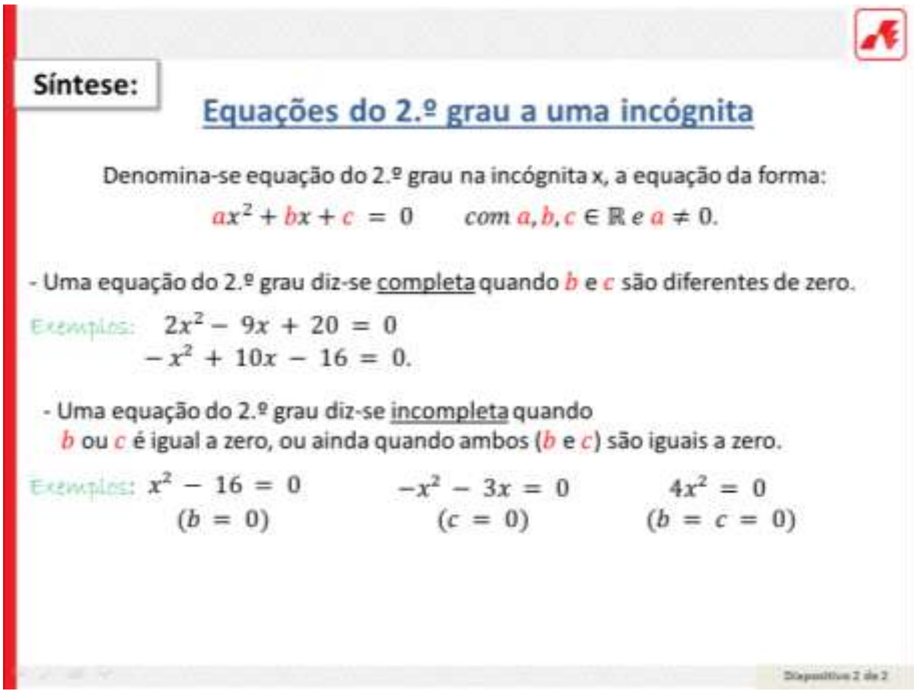
Sempre que seja oportuno o professor deve questionar os alunos da seguinte forma: "Turma, estamos perante uma equação de que grau? Porquê?", "Turma, estamos esta equação é completa? Porquê?", "A equação (em questão) tem quantas soluções?", entre outras.

❖ Extensão da tarefa:

Como extensão destas tarefas o professor poderá, sempre que achar oportuno, aproveitar momentos na discussão das tarefas, em grande-grupo, para fazer um *refresh* nos conceitos já trabalhados e um *upgrade* dos conceitos, nomeadamente, os conceitos descritos na página 1, entre outros que possam surgir.

PowerPoint utilizado no início da 5.ª aula





Planificação da 6.ª aula

Lições nº 133 **e** 134 **Data/Hora:** 6-Maio-2013 / 10:05 – 11:35 **Sala:** 8 **Turma:** 8º 3ª

Sumário:

Realização e discussão de tarefas que envolvem equações do 2.º grau.

Tópicos/Subtópicos:

Sequências e regularidades. Equações:

- Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita.

Objetivos específicos da tarefa 9: "Mais Desafios - II":

Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica;

Resolver equações (completas) do 2.º grau a uma incógnita, através da factorização de polinómios e da lei do anulamento do produto.

Objetivos específicos da tarefa 10: "Mais Desafios - III":

Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica;

Resolver equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita.

<u>NOTA</u>: Penso que os alunos sentirão necessidade de resolver estas tarefas algebricamente, porque têm resolvido problemas desta natureza, nas últimas aulas.

Com o desenrolar das tarefas pretendo recordar conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- Conhecer as propriedades e as regras das operações em $\mathbb{R}$ e usá-las no cálculo;
- Perceber os diferentes símbolos usuais em Álgebra (Por exemplo: $\mathbb{N}$; $\in$; $\notin$ $\pm$; $\neq$; $\Leftrightarrow$;$\vee$);
- Princípios e regras para a resolução de equações;
- Compreender a diferença entre as soluções da equação e a solução da tarefa;
- Simplificar expressões algébricas;
- Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação;
- Grau de um polinómio;
- Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios;
- Compreender a decomposição de um polinómio em fatores;
- Compreender a utilização a lei do anulamento do produto;
- Compreender a utilização da noção de raiz quadrada;
- Polígonos: as respetivas características, perímetros e áreas;
- Decomposição de polígonos;
- Congruências de figuras.

Recursos:

Quadro branco e marcador;
Tarefa 9 e 10, a negro;
Manual;
Calculadora;
Papel e lápis.

Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;
Resolução de problemas;
Comunicação matemática.

Metodologia de trabalho:

Exploração das tarefas a pares e discussões em grande grupo.

Desenvolvimento da aula:

(1) Início da aula: número das lições e data (ditado ou escrito no quadro) e sumário (ditado); (*5 minutos*)

(2) Distribuição/Apresentação da primeira parte da tarefa 9: "Mais Desafios - II"; (*5 minutos*)

(3) Exploração da primeira parte da tarefa por parte dos alunos; (*15 minutos*)

(4) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*20 minutos*)

(5) Distribuição/Apresentação da segunda parte da tarefa 9: "Mais Desafios - II"; (*5 minutos*)

(6) Exploração da segunda parte da tarefa por parte dos alunos; (*10 minutos*)

(7) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*15 minutos*)

(8) Só se houver tempo é que avançarei para a tarefa 10. Caso falte poucos minutos para terminar a aula poderei pedir aos alunos para terminarem o problema 2 da tarefa 8: "Mais Desafios – I" (distribuirei novamente esta tarefa, porque foi recolhida para digitalização na aula anterior) e/ou esclarecerei alguma dúvidas do TPC da aula de dia 29 de Abril.

(9) Continuação da resolução da tarefa 8: "Mais Desafios – I" e discussão; (*5+5 minutos*)

(10) (i) Escrever o TPC para a próxima aula no quadro (Manual: pg.210 - Problema: 2 e pg.211 – Exercício 1 e Problema: 8), (ii) recolher o TPC da aula de 2 de Maio (tarefa 4 – "Aplico o que aprendi – I" e a tarefa 7 – "Aplico o que aprendi – II") e (iii) distribuir as tarefas corrigidas das duas últimas aulas. (*5 minutos*)

Avaliação:

A avaliação reguladora e não sumativa será feita, através, de observação direta e registo informal:

- Do interesse, empenho, desempenho, sociabilidade e adesão às tarefas propostas;
- Da capacidade raciocínio e comunicação (o aluno ter a capacidade de interpretar, expressar um plano para resolver o problema, formular conjeturas e argumentar, justificando as suas respostas);

Pedagogia diferenciada (NEE/ estratégias de remediação/ planos de recuperação/ planos de desenvolvimento)**:**

- Ter atenção aos registos efetuados por estes alunos.

Desenvolvimento da aula:

Tarefa: "Mais Desafios - II"

❖ Distribuição e apresentação da primeira parte da tarefa 9: "Mais Desafios – II" e definição da metodologia de trabalho. (*5 minutos*)

A aula terá início com a proposta de realização da tarefa "Mais Desafios - II".

Depois de distribuído a primeira parte da tarefa, será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de "vedar três lados" e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é determinar a largura que o terreno deverá ter para que a sua área seja $1200\ m^2$. Será, também, pedido que resolvam a tarefa a caneta.

Explica-se aos alunos que podem recorrer às estratégias de resolução que acharem pertinentes e deve ficar claro que têm de apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como, a estratégia que usaram, não esquecendo a resposta ao problema.

Informa-se que serão valorizadas as apresentações de diferentes estratégias de resolução e que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 15 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa, pois esta tarefa tem um grau de dificuldade bastante elevado, assim como, exige raciocínios mais elevados.

❖ Realização da primeira parte da tarefa 9: "Mais Desafios – II". (*15 minutos*)

Os alunos fazem trabalho autónomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 5 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e fazer um ponto de situação – discutindo em grande grupo os dados descritos no enunciado, e deve escreve-los no quadro – e também, deve ir alertando os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa.

A realização de exercícios e problemas que impliquem a conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica e, por sua vez, a resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, utilizando: a lei do anulamento do produto; a decomposição em fatores; os casos notáveis da multiplicação de binómios e/ou a noção de raiz quadrada, têm sido o foco das últimas aulas, pelo que se espera um envolvimento dos alunos na tarefa.

NOTA: Se a turma estiver bloqueada e não conseguir avançar na resolução desta parte da tarefa ("$x^2 - 50x + 600 = 0$"), o professor deve avançar para uma discussão em grade-grupo, pois a tarefa é de dificuldade elevada.

❖ Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da primeira parte da tarefa 9: "Mais Desafios – II":

Questão 1:

- Hipótese 1 – Tentativa erro:

Um possível valor para a largura $\rightarrow \boldsymbol{x}$	**Comprimento:** $\mathbf{100 - 2}\boldsymbol{x}$	**Área do terreno:** $\boldsymbol{x}\mathbf{(100 - 2}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$
10	$100 - 2 \times 10 = 80$	$10 \times 80 = 800$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	$100 - 2 \times 20 = 60$	$20 \times 60 = 1200$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	$100 - 2 \times 30 = 40$	$30 \times 40 = 1200$

Outra forma de confirmar que os valores obtidos estão corretos:

Vedação dos três lados do terreno: $100 = x + 100 - 2x + x$

Quando $x = 20$: $100 = 20 + 100 - 40 + 20 \Leftrightarrow 100 = 100$

Quando $x = 30$: $100 = 30 + 100 - 60 + 30 \Leftrightarrow 100 = 100$

R.: A largura do terreno pode ser 20 ou 30 metros.

- Dificuldades na hipótese 1:

Alguns alunos poderão considerar o perímetro e não a área. Para ultrapassar esta dificuldade o professor deverá sugerir ao aluno para ler, novamente, a pergunta do enunciado.

Alguns alunos poderão encontrar apenas um possível valor para a largura do terreno, neste caso, pode-se questionar os alunos da seguinte forma: "É esse o único valor possível?". O objetivo é despertar-lhes a curiosidade e o espírito de descoberta.

- Hipótese 2 – Uma possível resolução algébrica:

Seja x ($\in \mathbb{R}$) a largura do terreno

$x(100 - 2x) = 1200 \Leftrightarrow -2x^2 + 100x - 1200 = 0$

$\Leftrightarrow -2(x^2 - 50x + 600) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 50x + 600 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 20)(x - 30) = 0$

Os alunos terão de fazer por tentativa e erro, porque a fórmula resolvente só é dada no 9.º ano.

$$\Leftrightarrow x-20=0 \vee x-30=0$$
$$\Leftrightarrow x=20 \ \vee \ x=30$$

Solução da equação: C.S.= $\{20; 30\}$

R.: A largura do terreno pode ser 20 ou 30 metros.

- Dificuldades na hipótese 2:

Alguns alunos podem não se recordar da fórmula da área do um retângulo. Para ultrapassar esta dificuldade basta questionar a turma: "Turma, como se calcula a área de um retângulo?", de modo a, que seja a turma a responder.

Alguns alunos poderão considerar o perímetro e não a área. Para ultrapassar esta dificuldade o professor deverá sugerir ao aluno para ler, novamente, a pergunta do enunciado.

Interpretação do enunciado ("largura que o terreno deverá ter para que a sua área seja 1200m^2") e passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. Questionar o par: "Qual é o significado de '1200m^2 de área'?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

Alguns alunos poderão encontrar apenas um possível valor para a largura do terreno, neste caso, pode-se questionar os alunos da seguinte forma: "É esse o único valor possível?". O objetivo é despertar-lhes a curiosidade e o espírito de descoberta.

Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; (3) decompor um polinómio em fatores; (4) utilizar a lei do anulamento do produto e (5) aplicar os princípios de equivalência, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual, nomeadamente, a página 208 e 209? E o teu caderno?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

❖ <u>Discussão e síntese da primeira parte da tarefa 9: "Mais Desafios – II"</u> (*20 minutos*)

Neste momento pede-se aos alunos que parem de trabalhar.

O professor deve pedir a alguns alunos que tenham estratégias, as mais variadas possíveis (mas, aquelas que o professor achar que vão acrescentar, mais alguma, aprendizagem aos alunos), para irem ao quadro escreve-las e explicá-las à turma (de preferência um de cada vez, mas se houver falta de tempo irão ao quadro dois alunos de cada vez).

Caso só surja uma estratégia de resolução o professor deve mostrar mais estratégias possíveis à turma (focando-se sempre no objetivo principal desta parte da aula – Resolução de equações completas do 2.º grau a uma incógnita, através da factorização e utilização da lei do anulamento do produto), pedindo sempre aos alunos para escreverem as novas estratégias no caderno e não na folha tarefa.

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: "Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?", "Como é que ele(a) pensou?", entre outras.

Como forma de ligação à apresentação de outra estratégia, o professor poderá colocar a questão: "Alguém utilizou outra estratégia?" ou "Alguém resolveu de outra forma?".

- **Se a turma estiver bloqueada** na resolução da equação completa do 2.º grau, o professor deve avançar para uma discussão em grade-grupo.

  Depois de chegarmos a este ponto da equação,

  Seja x ($\in \mathbb{R}$) a largura do terreno

$$\begin{aligned} x(100-2x)=1200 &\Leftrightarrow -2x^2+100x-1200=0 \\ &\Leftrightarrow -2(x^2-50x+600)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-50x+600=0 \end{aligned}$$

Devemos resolver por tentativa erro.

O professor deve questionar a turma:
"Como podemos transformas '$x^2-50x+600$' num produto de dois fatores?",
"Turma temos, então, de obter algo do género:

$$(x-a)(x-b)$$

E o que sabemos mais?
Este $(-\boldsymbol{a})(-\boldsymbol{b})=\mathbf{600}$ e $(-\boldsymbol{ax})(-\boldsymbol{bx})=(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}=-\mathbf{50}\boldsymbol{x}$."
Para terminar a resolução desta equação o professor deverá questionar a turma: "Que valores podemos nós escolher, de modo a, satisfazer estas condições?", "Vamos pensar em dois números que multiplicados deem 600.", entre outras questões.

Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. A maioria das questões servirão de síntese e de um revisitar dos conhecimentos já estudados (quer neste ano letivo, assim como, nos anos letivos anteriores).

Nesta discussão, é importante que os alunos consigam interpretar as soluções da equação tendo em conta a situação da realidade com que estão a trabalhar e que se apercebam de que existem dois rectângulos com perímetro igual a 100 m e área igual a 1200 m^2, um com dimensões 20×60 e outro com dimensões 30×40.

Muitas vezes os alunos chegam a uma destas soluções por tentativa e erro. É fundamental mostrar-lhes um método mais formal de resolução a que podem recorrer, neste caso usando uma equação do 2.º grau (por exemplo, a hipótese 2).

Sempre que seja oportuno o professor deve questionar os alunos da seguinte forma: "Turma, esta equação é de que grau? Porquê?", "Estamos perante uma equação completa ou incompleta? Porquê?", "Então quantas soluções poder ter uma equação do 2.º grau?", entre outras. E informá-los que existe outra forma mais rápida de encontrar as soluções das equações de 2.º grau completas e que tem como nome: fórmula resolvente – que aprenderão no próximo ano letivo.

❖ <u>Distribuição e apresentação da segunda parte da tarefa 9: "Mais Desafios – II" e definição da metodologia de trabalho</u>. (*5 minutos*)

Depois de distribuída a segunda parte da tarefa, será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de "números naturais", "consecutivos" e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é determinar os números pares consecutivos que multiplicados darão o número 4224. Será, também, pedido que resolvam a tarefa a caneta.

Explica-se aos alunos que podem recorrer às estratégias de resolução que acharem pertinentes e deve ficar claro que têm de apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como, a estratégia que usaram, não esquecendo a resposta ao problema.

Informa-se que serão valorizadas as apresentações de diferentes estratégias de resolução e que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 10 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.

Depois da discussão anterior, espera-se que os alunos consigam resolver esta equação do 2.º grau completa por tentativa erro (ou seja, pensando na distributiva "ao contrário").

❖ Realização da segunda parte da tarefa 9: "Mais Desafios – II". (*10 minutos*)
Análoga à realização da primeira parte da tarefa 9.

❖ Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da segunda parte da tarefa 9: "Mais Desafios – II":

Questão 2:
- Hipótese 1 – Tentativa erro:
Consideremos os seguintes números naturais ($\mathbb{N}$) pares consecutivos:
$60 \times 62 = 3720$
$62 \times 64 = 3968$
$64 \times 66 = 4224$
R.: Esses números são o 64 e o 66.

Nota: Para os alunos que resolverem, rapidamente, o problema por este método será pedido que recorram a uma resolução algébrica. Pois é fundamental mostrar-lhes um método mais formal de resolução a que podem recorrer, neste caso usando uma equação do 2.º grau. Informando-os que que o número dado no enunciado é bastante pequeno e nesse caso é simples de resolver por tentativa erro, mas se fosse o número, por exemplo: 97 555 128, como resolveriam o problema?

- Dificuldade na hipótese 1:
Alguns alunos poderão não considerar números pares e/ou consecutivos. Para ultrapassar esta dificuldade o professor deverá sugerir ao aluno para ler, novamente, o enunciado. Ou questionar a turma, se os números escolhidos pelo colega são números pares consecutivos. Ou questionar diretamente o aluno: "O que é um número par?", "Dá-me um exemplo de dois números pares consecutivos? Agora multiplica-os… obtiveste o número 4224?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

- Hipótese 2 – Uma das possíveis resoluções algébrica:
Dois números pares consecutivos: $\boldsymbol{2x}$ e $\boldsymbol{2x+2}$, com $x \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} 2x(2x+2) = 4224 &\Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 4224 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-64)(2x+66) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 64 = 0 \vee 2x + 66 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 32 \ \vee \ x = -33 \end{aligned}$$
Solução da equação: C.S.= $\{-33; 32\}$
Solução do problema:
$x = -33 \notin \mathbb{N}$ (logo não o podemos considerar)
$x = 32 \in \mathbb{N}$
2 x 32 = 64
2 x 32 + 2 = 66
(64 x 66 = 4224)
R.: Esses números são o 64 e o 66.

- Hipótese 3 – Outras das possíveis resoluções algébricas:
Dois números pares consecutivos: $\boldsymbol{2x}$ e $\boldsymbol{2x+2}$, com $x \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} 2x(2x+2) = 4224 &\Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 4224 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 1056 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-32)(x+33) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 32 = 0 \vee x + 33 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 32 \ \vee \ x = -33 \end{aligned}$$
Solução da equação: C.S.= $\{-33; 32\}$
Solução do problema:

$x = -33 \notin \mathbb{N}$ (logo não o podemos considerar)
$x = 32 \in \mathbb{N}$
2 x 32 = 64
2 x 32 + 2 = 66
(64 x 66 = 4224)

R.: Esses números são o 64 e o 66.

- Dificuldades nas hipóteses 2 e 3:

Alguns alunos poderão não estar recordados de como se representa, algebricamente, um número par e, por sua vez, o número par consecutivo. Para ultrapassar esta dificuldade o professor deverá questionar a turma: "Turma, como se representa algebricamente um número par? E o seu consecutivo?", de modo a, que seja a turma a ajudar o colega a ultrapassar esta dificuldade.

Se esta dúvida for geral, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e escrever no quadro 1 sequências de números ("1, 2, 3, 4, 5,…") e questionar a turma: "Qual é o termo geral desta sequência?". Os alunos vão rapidamente responder "n", porque esta matéria foi bastante trabalhada com os alunos e é-lhes bastante familiar. De seguida, pede à turma para lhe ditarem os 5 primeiros números pares e de seguida os seus consecutivos. O professor escreverá essas sequências no quadro e pedirá aos alunos para pensarem nos seus termos gerais e para continuarem o seu trabalho autónomo.

1	*2*	*4*
2	*4*	*6*
3	*6*	*8*
4	*8*	*10*
5	*10*	*12*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{n}$	**?**	**?**

Alguns alunos poderão ter dificuldades em formular a equação. Para ultrapassar esta dificuldade o professor deverá sugerir ao aluno para ler, novamente, o enunciado. Ou questionar diretamente o aluno: "Explica-me por palavras tuas o que está dito no enunciado.", "Qual a operação matemática que pensas estar envolvida no enunciado?", "Qual é a operação matemática para o produto?". O professor poderá dar exemplos com números propriamente ditos, como por exemplo: "Como podes escrever o produto entre 2 e 4?" e "Obtiveste o número 4224?". O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

Alguns alunos poderão encontrar as soluções da equação e dizer que são as soluções do problema. Para ultrapassar esta dificuldade o professor deverá questionar a turma: "Turma, -33 é um número natural? ... Então se -33 não é um número natural ficamos com quantas soluções possíveis? … E o enunciado pede quantos números pares? … Então o que temos ainda de fazer?", de modo a, que seja a turma a ajudar o colega a ultrapassar estas dificuldades.

Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; (3) decompor um polinómio em fatores; (4) utilizar a lei do anulamento do produto e (5) aplicar os princípios de equivalência, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual, nomeadamente, a página 208 e 209? E o teu caderno?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos. Ou então "abrir" a dúvida à turma, de modo a, que seja a turma a ajudar o colega a ultrapassar as dificuldades.

❖ <u>Discussão e síntese da segunda parte da tarefa 9: "Mais Desafios – II"</u> (*15 minutos*)

Análoga à discussão e síntese da primeira parte da tarefa 9.

Por fim, o professor deve passar aos alunos o quanto é importante:

> Interpretar as soluções da equação tendo em conta a situação da realidade com que estão a trabalhar e que se apercebam que uma das soluções da equação não pode, de todo, ser solução do problema e que a outra solução ainda tem de ser trabalhada, de forma a, surgir as soluções do problema.

Muitas vezes os alunos chegam a uma destas soluções por tentativa e erro. É fundamental mostrar-lhes um método mais formal de resolução a que podem recorrer, neste caso usando uma equação do 2.º grau (por exemplo, a hipótese 2 e/ou 3).

E sempre que seja oportuno deve questionar os alunos da seguinte forma: "Turma, esta equação é de que grau? Porquê?", "Estamos perante uma equação completa ou incompleta? Porquê?", "Então quantas soluções poder ter uma equação do 2.º grau?", entre outras. E informá-los que existe outra forma mais rápida de encontrar as soluções das equações de 2.º grau completas e que tem como nome: fórmula resolvente – que aprenderão no próximo ano letivo.

Outras hipóteses de trabalho caso haja tempo:

Tarefa: "Mais Desafios - III"

❖ Distribuição e apresentação da primeira parte da tarefa 10: "Mais Desafios – III" e definição da metodologia de trabalho. (*2 minutos*)

Análogo à tarefa anterior.

… Será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de "lados adjacentes" e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é determinar o perímetro do retângulo. …

❖ Realização da primeira parte da tarefa 10: "Mais Desafios – III". (*10 minutos*)

Análogo à tarefa anterior.

❖ Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da primeira parte da tarefa 10: "Mais Desafios – III":

Questão 1:
- Hipótese 1 – Tentativa erro (com números decimais):

Um possível valor para o lado do quadrado $\rightarrow x$	Comprimento do retângulo: $x+3$	Largura do retângulo: $x+1$	Área do quadrado + 5 = Área do retângulo
⋮	⋮	⋮	⋮
0,5	3,5	1,5	$0{,}25+5=3{,}5\times 1{,}5$

$P_{retângulo}=2\times 3{,}5+2\times 1{,}5=10\ cm$
R.: O perímetro do retângulo é de 10 centímetros.

- Dificuldade na hipótese 1:
Como o enunciado já foi esclarecido ("dois lados adjacentes") não se espera grandes dificuldades, nesta hipótese.

Os alunos poderão descobrir as dimensões do retângulo e esquecerem-se de calcular o seu perímetro. Para ultrapassar esta dificuldade o professor deverá pergunta ao aluno: "O que nos pede o enunciado?".

- Hipótese 2 – Uma das possíveis resoluções algébrica:
Seja x ($\in \mathbb{N}$) a medida do lado do quadrado,
Então a $A_{quadrado}=x^2$ e a $A_{retângulo}=x^2+5$
$x^2+5=(x+1)(x+3) \Leftrightarrow x^2+5=x^2+4x+3$
$\Leftrightarrow 4x=2$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Solução da equação: C.S.= $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Solução do problema:

Comprimento do retângulo: $x + 3$ então $\frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

Largura do retângulo: $x + 1$ então $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$$P_{retângulo} = 2 \times \frac{7}{2} + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{20}{2} = 10\ cm$$

R.: O perímetro do retângulo é de 10 centímetros.

- Hipótese 3 – Os alunos poderão resolver através de um sistema:

Seja x ($\in \mathbb{N}$) a medida do lado do quadrado, logo $A_{quadrado} = x^2$

Então

$$\begin{cases} A_{retângulo} = x^2 + 5 \\ A_{retângulo} = (x+3)(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \textit{Aplicando o método de substituição} \\ \textit{e os princípios de equivalência} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A_{retângulo} = \frac{21}{4} cm^2 \\ x = \frac{1}{2} cm \end{cases}$$

Solução do sistema: $(A_{retângulo};\ x) = \left(\frac{21}{4}; \frac{1}{2}\right)$

Solução do problema:

Comprimento do retângulo: $x + 3$ então $\frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

Largura do retângulo: $x + 1$ então $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$$P_{retângulo} = 2 \times \frac{7}{2} + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{20}{2} = 10\ cm$$

R.: O perímetro do retângulo é de 10 centímetros.

- Dificuldades nas hipóteses 2 e 3:

Como o enunciado já foi esclarecido ("dois lados adjacentes") não se espera grandes dificuldades, nestas hipóteses.

Os alunos poderão descobrir as dimensões do retângulo e esquecerem-se de calcular o seu perímetro. Para ultrapassar esta dificuldade o professor deverá pergunta ao aluno: "O que nos pede o enunciado?".

Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; (3) decompor um polinómio em fatores; (4) aplicar os princípios de equivalência; (5) o método de substituição nos sistemas e (6) utilizar as características dos polígonos (perímetros e áreas) e, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual? E o teu caderno?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos. Ou então "abrir" a dúvida à turma, de modo a, que seja a turma a ajudar o colega a ultrapassar as dificuldades.

❖ Discussão e síntese da primeira parte da tarefa 10: "Mais Desafios – III" (*10 minutos*)

Análoga à discussão e síntese da tarefa 9.

❖ Esclarecimento de dúvidas sobre o TPC da aula anterior: (*5 minutos*)

Se algum aluno trouxer dúvidas do TPC (p.210 do manual, ex.: 2) será esclarecido. Se houver tempo a dúvida desse aluno será colocada à turma, para ser a turma a esclarecer esse aluno. Se não houver tempo, essa dúvida poderá ser tirada diretamente com o aluno durante a aula (enquanto os restantes alunos resolvem a tarefa proposta pelo professor) ou no final da aula.

Caso não haja dúvidas, pode-se avançar para a segunda parte da tarefa 10 (isto se houver tempo suficiente) ou avançar para a escrita do TPC no quadro, pedindo aos alunos o realizarem.

❖ Distribuição e apresentação da segunda parte da tarefa 10: "Mais Desafios – III" e definição da metodologia de trabalho. (*2 minutos*)

Análogo à tarefa anterior.

… Será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de "dividi-lo em dois terrenos quadrados iguais" e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é determinar o custo, em euros, da rede gasta para a separação do terreno. …

Por fim, fica definido 5 minutos de trabalho autónomo para a realização da segunda parte da tarefa.

❖ Realização da segunda parte da tarefa 10: "Mais Desafios – III". (*5 minutos*)

Análogo à tarefa anterior.

❖ Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da segunda parte da tarefa 10: "Mais Desafios – III":

Questão 2:
NOTA: A hipótese tentativa erro é sempre valida, mas é esperado que os alunos sintam a necessidade de resolver o problema algebricamente, porque foi o foco das últimas aulas e é o subtópico que temos estado a estudar.

E segundo o *Programa de matemática do ensino básico* (Ponte *et al.*, 2007) é fundamental que os alunos sejam "capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos." (p. 55)

- Hipótese 1 – Algebricamente, utilizando a noção de raiz quadrada:

Dados do problema:

$A_{retângulo} = 162\ m^2$

Cada metro de rede = 3€

$A_{quadrado} = A_{retângulo} : 2 = 162 : 2 = 81\ m^2$

$A_{quadrado} = l^2$

$l^2 = 81 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{81} \Leftrightarrow l = \pm 9 \Leftrightarrow l = -9 \vee l = 9$

Solução da equação: C.S.$= \{-9; 9\}$

Logo a medida do lado dos terrenos quadrangulares é de 9 metros (porque não existem medidas de comprimentos negativas).

Custo da separação do terreno:

$9 \times 3 = 27€$

R.: A separação do terreno vai custar-lhe 27 euros.

- Hipótese 2 – Algebricamente, utilizando a lei do anulamento do produto:

Dados do problema:

$A_{retângulo} = 162\ m^2$

Cada metro de rede = 3€

$A_{quadrado} = A_{retângulo} : 2 = 162 : 2 = 81\ m^2$

$A_{quadrado} = l^2$

$l^2 = 81 \Leftrightarrow l^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow l^2 - 9^2 = 0 \Leftrightarrow (l+9)(l-9) = 0 \Leftrightarrow l = -9 \vee l = 9$

Solução da equação: C.S.$= \{-9; 9\}$

Logo a medida do lado dos terrenos quadrangulares é de 9 metros (porque não existem medidas de comprimentos negativas).

Custo da separação do terreno:

$9 \times 3 = 27€$

R.: A separação do terreno vai custar-lhe 27 euros.

- Dificuldades nas hipóteses 1 e 2:
Como o enunciado foi esclarecido, após sua leitura, não se espera grandes dificuldades, nestas hipóteses.

Os alunos poderão descobrir a medida do lado dos terrenos quadrangulares e esquecerem-se de determinar o custo, em euros, da rede gasta para a separação do terreno. Para ultrapassar esta dificuldade o professor deverá pergunta ao aluno: "O que nos pede o enunciado?".

Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; (3) decompor um polinómio em fatores; (4) utilizar a lei do anulamento do produto e/ou a noção de raiz quadrada; (5) utilizar as características dos polígonos (perímetros e áreas) e (6) aplicar os princípios de equivalência, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual? E o teu caderno?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos. Ou então "abrir" a dúvida à turma, de modo a, que seja a turma a ajudar o colega a ultrapassar as dificuldades.

❖ <u>Discussão e síntese da segunda parte da tarefa 10: "Mais Desafios – III"</u> (*10 minutos*)

Análoga à discussão e síntese da tarefa anterior.

Outra hipótese de trabalho caso não haja tempo:

❖ <u>Distribuição da tarefa da aula anterior ("Mais Desafios – I") e continuação da resolução do problema 2 (pelos alunos) seguida da sua discussão (em grande-grupo)</u>. (*5 + 5 minutos*)

A realização, dificuldades e discussão estão contempladas na planificação da aula anterior (3 de Maio).

❖ <u>Registo do TPC para a próxima aula, recolha do TPC (da aula de 2 de Maio) e distribuição de tarefas corrigidas</u>: (*5 minutos*)

(i) Registar no quadro o TPC:

Manual: Página 210, problema: 2 e página 211, exercício 1 e problema 8;

<u>NOTA</u>: O objetivo destes problemas é a conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica e a resolução de equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita, utilizando a lei do anulamento do produto. São problemas semelhantes aos que fizemos na aula anterior (tarefa 8: Mais Desafios – I") e aos da última parte desta aula (tarefa 10 "Mais Desafios – III"), mas é necessário, porque os alunos precisam de ganhar hábito na resolução de problemas, pois o exame de 9.º ano contém bastantes problemas.

E o exercício é composto por 5 equações, cujo objetivo é determinar o conjunto-solução de cada uma das equações. Este exercício também é importante, porque os alunos precisam de ganhar prática na resolução de equações.

(ii) Recolher o TPC da aula de 2 de Maio (tarefa 4 – "Aplico o que aprendi – I" e a tarefa 7 – "Aplico o que aprendi – II");

(iii) Distribuir as tarefas corrigidas, das duas últimas aulas (2 e 3 de Maio).

❖ <u>Extensão das tarefas</u>:

Como extensão destas tarefas o professor poderá, sempre que achar oportuno, aproveitar momentos na discussão das tarefas, em grande-grupo, para fazer um *refresh* nos conceitos já trabalhados e um *upgrade* dos conceitos, nomeadamente, os conceitos descritos na página 1, entre outros que possam surgir.

Planificação da 7.ª aula

Lições nº 135 **e** 136 **Data/Hora:** 9-Maio-2013 / 11:45 – 13:15 **Sala:** 8 **Turma:** 8º 3ª

Sumário:

Realização e discussão das tarefas: "Cubos e pirâmides quadrangulares" e "Azulejos quadrados".

Tópicos/Subtópicos:

Sequências e regularidades. Equações:

- Equações (incompletas) do 2.º grau a uma incógnita.

Objetivos específicos da tarefa 11: "Cubos e pirâmides quadrangulares":

Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica;

Resolver uma equação do 3.º grau com duas incógnitas, por exemplo, através da factorização de polinómios e da lei do anulamento do produto.

Objetivos específicos da tarefa 12: "Azulejos quadrados":

Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica;

Resolver uma equação do 2.º grau a uma incógnita.

<u>NOTA</u>: Penso que os alunos sentirão necessidade de resolver estas tarefas algebricamente, porque têm resolvido problemas desta natureza, nas últimas aulas.

Com o desenrolar das tarefas pretendo recordar conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- Conhecer as propriedades e as regras das operações em $\mathbb{R}$ e usá-las no cálculo;
- Perceber os diferentes símbolos usuais em Álgebra (Por exemplo: $\mathbb{N}$; $\in$; $\notin$ $\pm$; $\neq$; $\Leftrightarrow$;$\vee$);
- Princípios e regras para a resolução de equações;
- Compreender a diferença entre as soluções da equação e a solução da tarefa;
- Simplificar expressões algébricas;
- Efetuar operações com polinómios, adição algébrica e multiplicação;
- Grau de um polinómio;
- Compreender e utilizar os casos notáveis da multiplicação de binómios;
- Compreender a decomposição de um polinómio em fatores;
- Compreender a utilização a lei do anulamento do produto;
- Sólidos geométricos: as respetivas características e volumes.

Recursos:

Quadro branco e marcador;

Tarefa 11 e 12, a negro;

Material manipulável para a tarefa 11 (5 conjuntos de pirâmides que formam um cubo e 2 conjuntos de pirâmides que não formam um cubo);

Manual;

Calculadora;

Papel e lápis.

Exemplo de algum material manipulável, a usar na tarefa 11:



Capacidades transversais:

Raciocínio matemático;

Resolução de problemas;

Comunicação matemática.

Metodologia de trabalho:

Exploração das tarefas a pares e discussões em grande grupo.

Desenvolvimento da aula:

(1) Início da aula: número das lições e data (ditado ou escrito no quadro) e sumário (ditado); (*5 minutos*)

(2) Distribuição/Apresentação da tarefa 11: "Cubos e pirâmides quadrangulares"; (*5 minutos*)
(3) Exploração da tarefa pelos alunos; (*20 minutos*)
(4) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*20 minutos*)
(5) Distribuição/Apresentação da tarefa 12: "Azulejos quadrados"; (*5 minutos*)
(6) Exploração da tarefa pelos dos alunos; (*10 minutos*)
(7) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (*10 minutos*)
(8) Esclarecimento de dúvidas sobre o TPC da aula anterior (Manual: pg.210 - Problema: 2 e pg.211 – Exercício 1 e Problema: 8). (*10 minutos*)
(9) Escrever o TPC para a próxima aula (13 de Maio) no quadro (Manual: p. 211 ex.:3; p. 216 e 217) e distribuir as tarefas corrigidas da última aula. (*5 minutos*)

Avaliação:

A avaliação reguladora e não sumativa será feita, através, de observação direta e registo informal:

- Do interesse, empenho, desempenho, sociabilidade e adesão às tarefas propostas;
- Da capacidade raciocínio e comunicação (o aluno ter a capacidade de interpretar, expressar um plano para resolver o problema, formular conjeturas e argumentar, justificando as suas respostas);

Pedagogia diferenciada (NEE/ estratégias de remediação/ planos de recuperação/ planos de desenvolvimento)**:**

- Ter atenção aos registos efetuados por estes alunos.

Desenvolvimento da aula:

Tarefa: "Cubos e pirâmides quadrangulares"

❖ Distribuição e apresentação da tarefa 11: "Cubos e pirâmides quadrangulares" e definição da metodologia de trabalho. (*5 minutos*)

A aula terá início com a proposta de realização da tarefa "Cubos e pirâmides quadrangulares".

Depois de distribuída a tarefa, será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de "decompor em seis pirâmides quadrangulares regulares e iguais", "analiticamente" e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é mostrar que a aresta do cubo é igual ao dobro da altura das pirâmides. Será, também, pedido que resolvam a tarefa a caneta.

Após a leitura e esclarecimento do enunciado o professor mostrará à turma o cubo de madeira e questionará: "Será que este cubo tem mesmo 6 pirâmides quadrangulares regulares e iguais?". De seguida, o professor desmontará o cubo obtendo assim as 6 pirâmides.

Ainda existirá uma sétima pirâmide para os alunos visualizarem que de facto, a altura da pirâmide é metade da aresta do cubo (ou, de forma análoga, que a aresta do cubo é igual ao dobro da altura das pirâmides):

E existirão 2 conjuntos de 6 pirâmides, em que a sua altura é igual à medida da aresta da sua base, assim os alunos perceberão que desta forma não conseguiram obter um cubo.
Explica-se aos alunos que podem recorrer às estratégias de resolução que acharem pertinentes e deve ficar claro que têm de apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como, a estratégia que usaram, não esquecendo a resposta ao problema.

Informa-se que serão valorizadas as apresentações de diferentes estratégias de resolução e que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 20 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.

❖ <u>Realização da tarefa 11: "Cubos e pirâmides quadrangulares"</u>. (*20 minutos*)

Os alunos fazem trabalho autónomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 5 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e fazer um ponto de situação – discutindo em grande grupo os dados descritos no enunciado, e deve escreve-los no quadro – e também, deve ir alertando os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa.

<u>NOTA</u>: A realização de problemas que impliquem a conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica e, por sua vez, a resolução de equações do 2.º grau a uma incógnita, utilizando: a lei do anulamento do produto; a decomposição em fatores; os casos notáveis da multiplicação de binómios e/ou a noção de raiz quadrada, têm sido o foco das últimas aulas, pelo que se espera um envolvimento dos alunos na tarefa.

Ainda assim, a demonstração desta tarefa é bastante complexa e exigente, porque consiste em resolver uma equação do 3.º grau com duas incógnitas (poderia ser uma tarefa para alunos do 10.º ano).

❖ <u>Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da tarefa 11: "Cubos e pirâmides quadrangulares"</u>:

- Hipótese 1 – Dar apenas alguns exemplos:
Esta hipótese não mostra que a aresta do cubo é igual ao dobro da altura das pirâmides (quadrangulares regulares e iguais), mas possivelmente irá ser uma das hipóteses de resposta dada pelos alunos, principalmente, por aqueles que não conseguem abstrair-se do uso nos números.

Sabemos que:

$V_{cubo} = a^3$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h$

[a ($\in \mathbb{R}$) – aresta; h ($\in \mathbb{R}$) – altura]

Se a aresta do cubo for 4 cm:

$V_{cubo} = 4^3 = 64\ cm^3$

$V_{cubo} = 6 \times V_{pirâmide} \Leftrightarrow 64 = 6 \times \frac{1}{3} \times 4^2 \times h$

$\Leftrightarrow 64 = 32 \times h$

$\Leftrightarrow h = 2$ (2 é metade de 4)

Se a aresta do cubo for 10 cm:

$V_{cubo} = 10^3 = 1000\ cm^3$

$V_{cubo} = 6 \times V_{pirâmide} \Leftrightarrow 1000 = 6 \times \frac{1}{3} \times 10^2 \times h$

$\Leftrightarrow 1000 = 200 \times h$

$\Leftrightarrow h = 5$ (5 é metade de 10)

- Dificuldades na hipótese 1:

Alguns alunos poderão considerar o perímetro ou a área. Para ultrapassar esta dificuldade o professor deverá sugerir ao aluno para utilizar o material manipulável, questionando: "Explica-me por palavras tuas o que está dito no enunciado.", "Estes sólidos geométricos estão em 2D ou em 3D?", "Como conseguimos relacionar a aresta do cubo com a altura da pirâmide?". O objetivo é fazer com que aluno perceba que necessita de comparar os volumes.

Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) aplicar os princípios de equivalência; (2) simplificar expressões algébricas e (3) determinar o volume do cubo e pirâmides, deve-se questioná-los da seguinte forma: "Já consultaste o manual, nomeadamente, a página 155?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

Nota: Para os alunos que resolverem, rapidamente, a tarefa por este "método" será pedido que recorram a uma resolução algébrica. Pois é fundamental mostrar-lhes o método formal de resolução para este tipo de tarefa. O objetivo é despertar-lhes a curiosidade e o espírito de descoberta, para uma demostração matemática.

- Hipótese 2 – Uma possível resolução algébrica:

Provar:

Aresta do cubo ($a \in \mathbb{R}$) = 2 x altura da pirâmide ($h \in \mathbb{R}$)

$$V_{cubo} = a^3$$
$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h = \frac{1}{3} \times a^2 \times h$$

$$6 \times V_{pirâmide} = V_{cubo}$$
$$6 \times \frac{1}{3} \times a^2 \times h = a^3 \Leftrightarrow 2a^2h = a^2 \times a \Leftrightarrow 2h = a$$

(porque $a \neq 0$)

Logo, a aresta do cubo é igual ao dobro da altura das pirâmides.

- Hipótese 3 – Uma possível resolução algébrica:

Provar:

Aresta do cubo ($a \in \mathbb{R}$) = 2 x altura da pirâmide ($h \in \mathbb{R}$)

$$\frac{V_{cubo}}{6} = V_{pirâmide}$$

$$\frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \times a^2 \times h \Leftrightarrow a^3 = 2a^2h$$
$$\Leftrightarrow a^3 - 2a^2h = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2(a - 2h) = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 = 0 \vee a - 2h = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2h$$

Logo, a aresta do cubo é igual ao dobro da altura das pirâmides.

- Hipótese 4 – Muito parecida à hipótese anterior:

Provar:

Aresta do cubo ($a \in \mathbb{R}$) = 2 x altura da pirâmide ($h \in \mathbb{R}$)

$$V_{cubo} = 6 \times V_{pirâmide}$$
$$a^3 = 6 \times \frac{1}{3} \times a^2 \times h \Leftrightarrow a^3 = 2a^2h$$
$$\Leftrightarrow a^3 - 2a^2h = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2(a - 2h) = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 = 0 \vee a - 2h = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2h$$

Logo, a aresta do cubo é igual ao dobro da altura das pirâmides.

- Dificuldades nas hipóteses 2, 3 e 4:

É expectável que surjam as mesmas dúvidas da hipótese 1 e serão ultrapassadas da mesma forma.

Poderão surgir ainda algumas dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; (3) decompor um polinómio em fatores; (4) utilizar a lei do anulamento do produto e (5) aplicar os princípios de equivalência. Neste caso, deve-se questionar os alunos da seguinte forma: "Já consultaste o manual, nomeadamente, a página 208 e 209? E o teu caderno?". O objetivo é tornar os alunos mais autónomos.

❖ <u>Discussão e síntese da tarefa 11: "Cubos e pirâmides quadrangulares"</u> (*20 minutos*)

Neste momento pede-se aos alunos que parem de trabalhar.

O professor deve pedir a alguns alunos que tenham estratégias, as mais variadas possíveis (mas, aquelas que o professor achar que vão acrescentar, mais alguma, aprendizagem aos alunos), para irem ao quadro escreve-las e explicá-las à turma (de preferência um de cada vez, mas se houver falta de tempo irão ao quadro dois alunos de cada vez).

Caso só surja uma estratégia de resolução o professor deve mostrar mais estratégias possíveis à turma (a sequência de estratégias de resolução deverá ser hipótese 1, seguida da hipótese 2 e 3), pedindo sempre aos alunos para escreverem as novas estratégias no caderno e não na folha tarefa.

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: "Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?", "Como é que ele(a) pensou?", entre outras. E como forma de ligação à apresentação de outra estratégia, o professor poderá colocar a questão: "Alguém utilizou outra estratégia?" ou "Alguém resolveu de outra forma?".

Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. A maioria das questões servirão de síntese e de um revisitar dos conhecimentos já estudados (quer neste ano letivo, assim como, nos anos letivos anteriores).

Nesta discussão, é importante que os alunos percebam o quanto é importante a demonstração em matemática. Pois no que diz respeito a este tipo de demonstrações, elas devem ser referidas sempre que possível, de forma a, preparar os alunos para o ensino secundário. "O hábito de pensar corretamente, que é o que afinal está em causa, deve ser acompanhado do hábito de argumentar oralmente ou por escrito e, sempre que possível, os estudantes devem realizar exercícios metodológicos de descoberta de justificações." (Ponte *et al*., 2007, p.21)

Sempre que seja oportuno o professor deve questionar os alunos da seguinte forma: "Turma, esta equação é de que grau? Porquê?", "Esta equação tem quantas incógnitas?", entre outras.

Por fim, o professor deverá informá-los que resolveram uma tarefa ao nível do 10.º ano de escolaridade, com o objetivo de lhes mostrar, que mesmo sendo alunos do 8.º ano, foram capazes de resolver uma tarefa deste nível de dificuldade.

<u>Tarefa: "Azulejos quadrados"</u>

❖ <u>Distribuição e apresentação da tarefa 12: "Azulejos quadrados" e definição da metodologia de trabalho</u>. (*5 minutos*)

A segunda parte da aula terá início com a proposta de realização da tarefa "Azulejos quadrados".

Depois de distribuída a tarefa, será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de "dispor em forma de quadrado vários azulejos de forma também quadrada" e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é descobrir a quantidade de azulejos que dispúnhamos inicialmente. Será, também, pedido que resolvam a tarefa a caneta.

Explica-se aos alunos que podem recorrer às estratégias de resolução que acharem pertinentes e deve ficar claro que têm de apresentar o seu raciocínio e conjeturas, assim como, a estratégia que usaram, não esquecendo a resposta ao problema.

Informa-se que serão valorizadas as apresentações de diferentes estratégias de resolução e que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 10 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.

❖ <u>Realização da tarefa 12: "Azulejos quadrados"</u>. (*10 minutos*)

Os alunos fazem trabalho autónomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 3 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autónomo dos alunos e fazer um ponto de situação – discutindo em grande grupo os dados descritos no enunciado, e deve escreve-los no quadro – e também, deve ir alertando os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa.

❖ <u>Algumas das possíveis resoluções e dificuldades da tarefa 12: "Azulejos quadrados"</u>:

<u>NOTA</u>: A hipótese tentativa erro é sempre valida, mas é esperado que os alunos sintam a necessidade de resolver o problema algebricamente, porque foi o foco das últimas aulas e é o subtópico que temos estado a estudar.

- Hipótese 1 – Uma das possíveis resoluções algébrica:

Seja x ($\in \mathbb{N}$) o número de azulejos do lado do quadrado,

$$\begin{aligned} x^2+39=(x+1)^2-50 &\Leftrightarrow x^2+39=x^2+2x+1-50 \\ &\Leftrightarrow 39=2x-49 \\ &\Leftrightarrow 2x=88 \\ &\Leftrightarrow x=44 \end{aligned}$$

Solução da equação: C.S.= $\{44\}$

Solução do problema:

Quantos azulejos dispunham inicialmente?

Se $x=44$

Então $44^2+39=1936+39=1975$ azulejos

R.: Dispúnhamos inicialmente 1975 azulejos.

- Hipótese 2 – Uma das possíveis resoluções algébrica:

Seja x ($\in \mathbb{N}$) o número de azulejos do lado do quadrado,

$$\begin{aligned} x^2+39=(x+1)^2-50 &\Leftrightarrow x^2+39=x^2+2x+1-50 \\ &\Leftrightarrow 39=2x-49 \\ &\Leftrightarrow 2x=88 \\ &\Leftrightarrow x=44 \end{aligned}$$

Solução da equação: C.S.= $\{44\}$

Solução do problema:

Quantos azulejos dispunham inicialmente?

Se $x = 44$
Então $(44+1)^2 - 50 = 45^2 - 50 = 1975$ azulejos
R.: Dispúnhamos inicialmente 1975 azulejos.

- Hipótese 3 – Uma das possíveis resoluções algébrica:

Seja x ($\in \mathbb{N}$) o número de azulejos do lado do quadrado e t ($\in \mathbb{N}$) o total de azulejos do quadrado, então:

$$\begin{cases} x^2 + 39 = t \\ (x+1)^2 - 50 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \textit{Aplicando o método de substituição} \\ \textit{e os princípios de equivalência} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 44 \\ t = 1975 \end{cases}$$

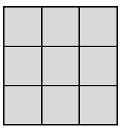
Solução do sistema: $(x; t) = (44; 1975)$
R.: Dispúnhamos inicialmente 1975 azulejos.

- Dificuldades nas hipóteses 1, 2 e 3:

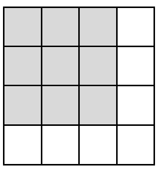
Passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. Questionar o par: “Explica-me por palavras tuas o que está dito no enunciado.”, “Sabem a quantidade de azulejos que formam o lado do quadrado de azulejos quadrados?” e desta forma espera-se que o par responda “Não”. O objetivo é levar os alunos a sentir a necessidade de utilizar uma letra para definir o número de azulejos, do lado do quadrado.

Alguns alunos poderão não perceber o significado de “acrescentar então mais um azulejo de cada lado”. Para ultrapassar esta dificuldade o professor poderá sugerir aos alunos que desenhem um quadrado com, por exemplo, 9 azulejos e questioná-los: “Que figura obteriam se acrescentassem um azulejo de cada lado, desse quadrado?”. O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

<u>Exemplo</u>:
Quadrado inicial, composto por 9 (= 3 x 3) azulejos quadrados:



Acrescentamos então mais um azulejo de cada lado [(3 + 1) x (3 + 1)], obtemos 16 azulejos:



Poderão surgir mais algumas dificuldades na passagem do enunciado para a linguagem algébrica. Para ultrapassar estas dificuldades deve confrontar-se o par da seguinte forma: “Qual é a operação matemática para ‘sobram’? E ‘faltam’?”, “Qual é o significado de ‘acrescentar mais um azulejo de cada lado do quadrado de azulejos’? E como podemos escrever isto matematicamente?”. O objetivo é levar os alunos a compreenderem e atribuírem significado ao enunciado.

Alguns pares poderão confundir a solução da equação com a resposta ao problema. Para ultrapassar esta dificuldade basta questionar a turma: “Turma, quantos azulejos dispúnhamos inicialmente”, de modo a, que seja a turma a responder.

Poderão surgir ainda algumas dificuldades em (1) operar com polinómios; (2) simplificar expressões algébricas; e (3) aplicar os princípios de equivalência. Neste caso, deve-se questionar os alunos da seguinte forma: “Já consultaste o manual? E o teu caderno?”. O objetivo é tornar os alunos mais autónomos. Ou então questionar a turma com as dúvidas desta natureza.

❖ <u>Discussão e síntese da tarefa 12: "Azulejos quadrados"</u> (*10 minutos*)

Neste momento pede-se aos alunos que parem de trabalhar.

O professor deve pedir a alguns alunos que tenham estratégias, as mais variadas possíveis (mas, aquelas que o professor achar que vão acrescentar, mais alguma, aprendizagem aos alunos), para irem ao quadro escreve-las e explicá-las à turma (de preferência um de cada vez, mas se houver falta de tempo irão ao quadro dois alunos apresentar as suas estratégias).

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: "Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?", "Como é que ele(a) pensou?", entre outras. E como forma de ligação à apresentação de outra estratégia, o professor poderá colocar a questão: "Alguém utilizou outra estratégia?" ou "Alguém resolveu de outra forma?".

Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. A maioria das questões servirão de síntese e de um revisitar dos conhecimentos já estudados (quer neste ano letivo, assim como, nos anos letivos anteriores).

Assim que seja oportuno o professor deve questionar os alunos da seguinte forma: "Turma, esta equação [a inicial] é de que grau? Porquê?", "E depois obtemos uma equação de que grau?", entre outras.

❖ <u>Esclarecimento de dúvidas sobre o TPC da aula anterior: (</u>*10 minutos*)

Se algum aluno trouxer dúvidas do TPC (Manual: pg.210 - Problema: 2 e pg.211 – Exercício: 1 e Problema: 8) será esclarecido. Se houver tempo a dúvida desse aluno será colocada à turma, para ser a turma a esclarecer esse aluno. Se não houver tempo, essa dúvida poderá ser tirada diretamente com o aluno durante a aula (enquanto os restantes alunos resolvem a tarefa proposta pelo professor), ou no final da aula, ou na pior das hipóteses na aula seguinte.

❖ <u>Registo do TPC para a próxima aula (13 de Maio) no quadro e distribuição das tarefas da aula anterior corrigida</u>: (*5 minutos*)

Manual: p. 211 ex.:3 e páginas 216 e 217.
Quem tiver terminado a tarefa 12 "Azulejos quadrados" poderá começar a realizar o TPC.

Serão distribuídas as tarefas recolhidas na aula anterior (corrigidas) e uma possível resolução para as tarefas 4 e 9 ("Aplico o que aprendi I e II").

<u>NOTA</u>: O objetivo deste TPC é preparar os alunos para o teste que irão realizar a 16 de Maio. Estas páginas incluem questões de escolha múltipla, de resposta curta e problemas, sobre a unidade de ensino lecionada (Sequencias e regularidades. Equações), de modo a, proporcionar aos alunos um balanço entre o estado das aprendizagens reais e aquilo que era esperado (realizando autoavaliação e desenvolvendo a autonomia e a confiança matemática).

❖ <u>Extensão das tarefas</u>:

Como extensão destas tarefas o professor poderá, sempre que achar oportuno, aproveitar momentos na discussão das tarefas, em grande-grupo, para fazer um *refresh* nos conceitos já trabalhados e um *upgrade* dos conceitos, nomeadamente, os conceitos descritos na página 1, entre outros que possam surgir.

Anexo 2

Tarefas

Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa

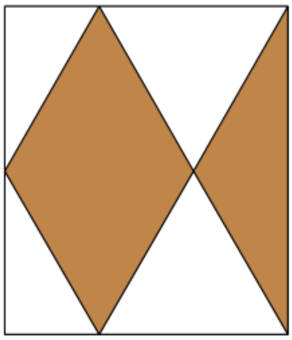
Tarefa 1 – Quem tem razão?

Ano Letivo 2012/2013

Aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___

QUEM TEM RAZÃO?

Os pais da Carla, ambos professores de Matemática, decidiram repavimentar o chão da cozinha com mosaicos iguais aos da figura, criando um padrão com losangos. O comprimento de cada mosaico é 1,25 vezes maior do que a largura.



a) A mãe afirma que a área pintada é igual a $\frac{5}{8}$ do quadrado da medida da largura do mosaico. Por seu lado, o pai afirma que a área pintada é metade da área do mosaico. A Carla hesitou, mas rapidamente percebeu que os dois têm razão. Apresenta argumentos que mostrem que ambos têm razão.

b) Supõe, agora, que a área da parte pintada de um dos mosaicos é 5,625 dm^2. Qual é, em centímetros, a largura de um dos mosaicos do chão da cozinha da Carla? Mostra como chegaste à tua resposta.

Adaptado de *Projeto 1001 Itens*, GAVE

Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa

Tarefa 2 – A vedação do terreno

Ano Letivo 2012/2013

Aluno: _________________________________ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___

A VEDAÇÃO DO TERRENO

A família do António tem um terreno que tem a forma de um quadrilátero com os ângulos todos iguais e área igual a 1200 m^2, cuja largura é a terça parte do comprimento. Este terreno vai ser vedado com rede, deixando um portão com 260 cm de largura. Quantos metros de rede, no mínimo, terão de comprar? Mostra como chegaste à tua resposta.

Adaptado de Conceição, A. & Almeida, M. (2011). *Matematicamente falando 8*. Porto: Areal Editores.

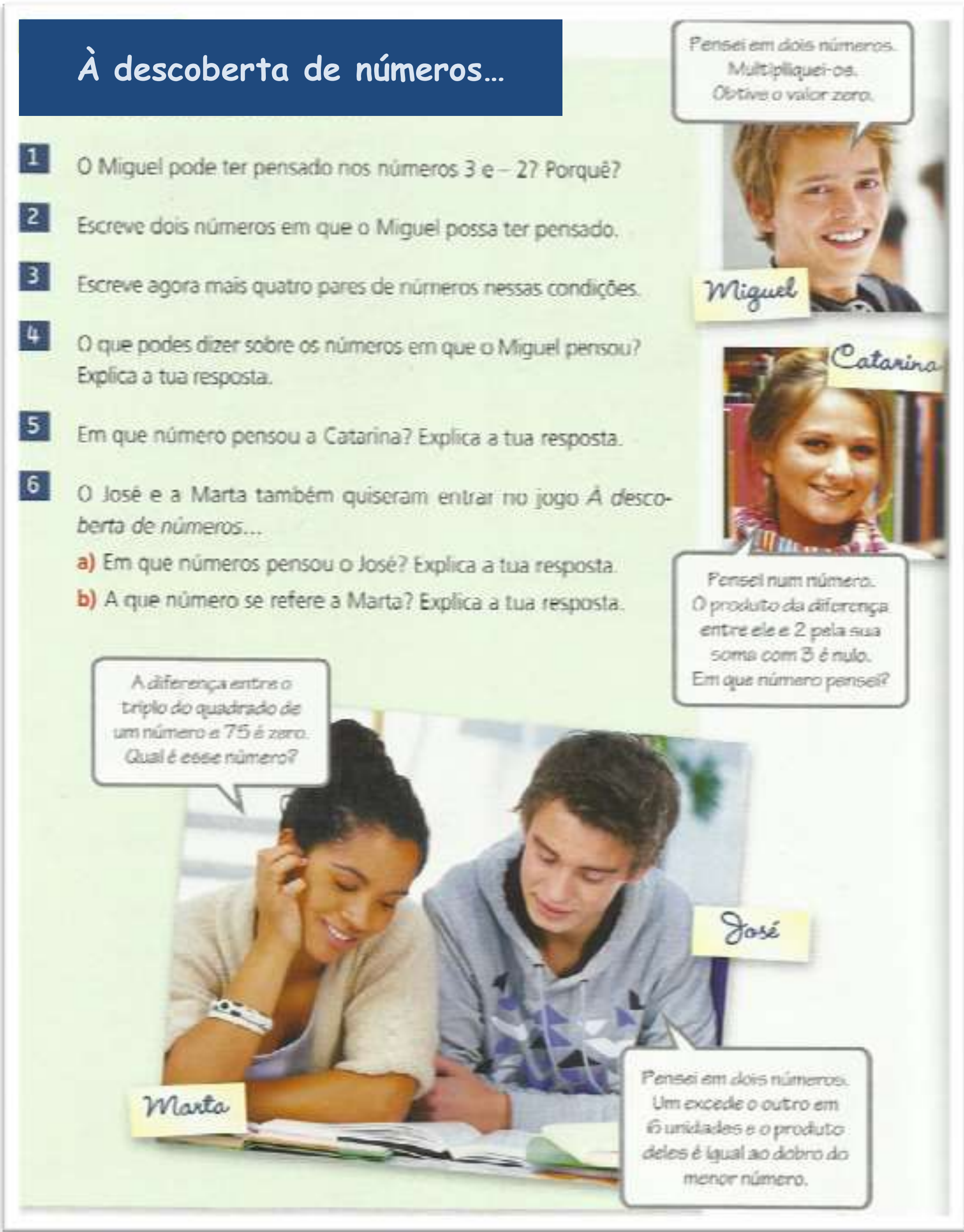
Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa

Tarefa 3 – À descoberta de números…

Ano Letivo 2012/2013

Aluno: _______________________________________ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___

À DESCOBERTA DE NÚMEROS…



À descoberta de números…

1 O Miguel pode ter pensado nos números 3 e – 2? Porquê?

2 Escreve dois números em que o Miguel possa ter pensado.

3 Escreve agora mais quatro pares de números nessas condições.

4 O que podes dizer sobre os números em que o Miguel pensou? Explica a tua resposta.

5 Em que número pensou a Catarina? Explica a tua resposta.

6 O José e a Marta também quiseram entrar no jogo *À descoberta de números…*

a) Em que números pensou o José? Explica a tua resposta.

b) A que número se refere a Marta? Explica a tua resposta.

Conceição, A. & Almeida, M. (2011). *Matematicamente falando 8*. Porto: Areal Editores.

Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa

Tarefa 4 – Aplico o que aprendi - I

Ano Letivo 2012/2013

Aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___

APLICO O QUE APRENDI - I

1. Resolve as equações, utilizando a lei do anulamento do produto.

a) $x(x+2)=0$	b) $(2c+1)\left(c-\frac{1}{3}\right)=0$	c) $-x^2-3x=0$
d) $3z^2=12z$	e) $(y-3)(2+7y)=0$	f) $(x+1)^2=0$
g) $x(x+1)+2(x+1)=0$	h) $(m+10)^2=100$	i) $(x+4)x=3(x+4)$

2. Constrói uma equação do segundo grau cujas soluções sejam $x=-3$ e $x=2$.

Adaptado de Conceição, A. & Almeida, M. (2011). *Matematicamente falando 8*. Porto: Areal Editores.

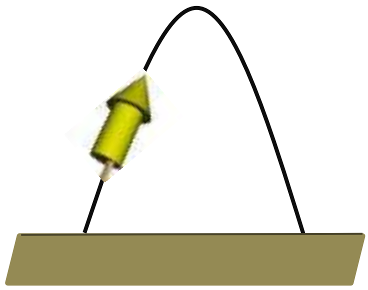
Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa

Tarefa 5 – A queda do foguete

Ano Letivo 2012/2013

Aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___

A QUEDA DO FOGUETE



O tio do André lançou um foguete.
O foguete percorre uma trajetória que pode ser descrita pela seguinte expressão:

$$h(t) = -3t^2 + 21t$$

onde h representa a altura, em metros, em cada instante e t representa o tempo, em segundos. Determina ao fim de quanto tempo o foguete chega ao solo. Não te esqueças de apresentar todos os cálculos que efetuares e de justificar todos os raciocínios.

Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa

Tarefa 6 – As janelas quadradas

Ano Letivo 2012/2013

Aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___

AS JANELAS QUADRADAS

Um edifício de escritórios tem uma fachada com vidros quadrados.

Sabendo que a 100 m^2 de fachada corresponde 400 quadrados de vidro, quanto mede, em cm, o lado de cada vidro?

Conceição, A. & Almeida, M. (2011). *Matematicamente falando 8*. Porto: Areal Editores.

	Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa Tarefa 7 – Aplico o que aprendi - II Ano Letivo 2012/2013
Aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___	

APLICO O QUE APRENDI - II

1. Determina o conjunto-solução de cada uma das equações:

a) $x^2 = 16$	b) $-x^2 + 9 = 0$	c) $4x^2 - 25 = 0$
d) $9x^2 = 16$	e) $x^2 + 1 = 0$	f) $-4x^2 = -100$
g) $2x^2 + 13 = 0$	h) $49 = x^2$	i) $x^2 = 0{,}01$

2. Constrói uma equação do segundo grau cujas soluções sejam $x = 9$ ou $x = -9$.

Adaptado de Conceição, A. & Almeida, M. (2011). *Matematicamente falando 8*. Porto: Areal Editores.

Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa

Tarefa 8 – Mais desafios - I

Ano Letivo 2012/2013

Aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___

MAIS DESAFIOS - I

Lê com atenção e resolve a caneta, justificando sempre as tuas respostas.

1. Se ao quadrado de um número lhe tiras o seu dobro, obténs o seu quíntuplo. Qual é esse número?

2. Num retângulo o comprimento é o dobro da largura. Adicionando 18 à área desse retângulo, obtém-se o dobro do seu perímetro. Qual o comprimento do retângulo?

Adaptado de Conceição, A. & Almeida, M. (2011). *Matematicamente falando 8*. Porto: Areal Editores.

Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa

Tarefa 9 – Mais desafios - II

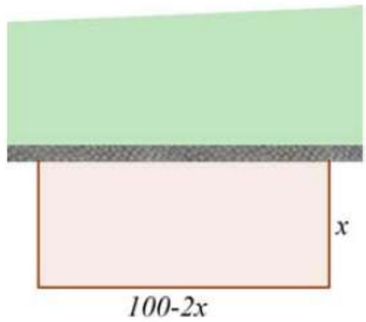
Ano Letivo 2012/2013

Aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___

MAIS DESAFIOS - II

Lê com atenção e resolve a caneta, justificando sempre as tuas respostas.

1. O Sr. Armando quer vedar três lados de um terreno de forma retangular, com uma rede com 100 m de comprimento, como mostra a figura.



Qual é a largura que o terreno deverá ter para que a sua área seja 1200 m^2?

Adaptado de Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa

Tarefa 10 – Mais desafios - III

Ano Letivo 2012/2013

Aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___

MAIS DESAFIOS - III

Lê com atenção e resolve a caneta, justificando sempre as tuas respostas.

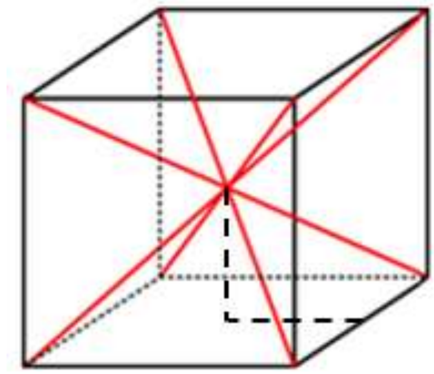
1. Se aumentarmos 1 cm e 3 cm a dois lados adjacentes de um quadrado, obtemos um retângulo cuja área excede em 5 cm^2 a área do quadrado inicial. Qual é o perímetro desse retângulo?

	Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa Tarefa 11 – Cubos e pirâmides quadrangulares Ano Letivo 2012/2013
Aluno: ______________________________ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___	

TAREFA DE EXPLORAÇÃO
CUBOS E PIRÂMIDES QUADRANGULARES

Qualquer cubo se pode decompor em seis pirâmides quadrangulares regulares e iguais, tal como se vê na figura.

Mostra, analiticamente, que a aresta do cubo é igual ao dobro da altura das pirâmides.



Adaptado de Projeto 1001 Itens, GAVE

Escola E.B. 2, 3 Fernando Pessoa

Tarefa 12 – Azulejos quadrados

Ano Letivo 2012/2013

Aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___ Data: ___/___/___

AZULEJOS QUADRADOS

Lê com atenção e resolve a caneta, justificando sempre as tuas respostas.

Queremos dispor em forma de quadrado vários azulejos de forma também quadrada.

Experimentámos de duas maneiras.
Da primeira vez sobraram 39.
Acrescentamos então mais um azulejo de cada lado. Desta vez faltavam 50.
De quantos azulejos dispúnhamos inicialmente?

Conceição, A. & Almeida, M. (2011). *Matematicamente falando 8*. Porto: Areal Editores.

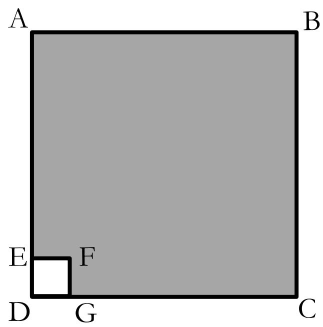
Anexo 3

Problema do teste de avaliação sumativa

Na figura, está apresentado um esquema do quarto do Diogo, esquema que **não está desenhado à escala**.

Sabe-se ainda que:

- as medidas estão expressas em metros;
- [ABCGFE] representa o quarto do Diogo;
- [ABCD] é um quadrado;
- [DEFG] é um quadrado e representa um pilar;
- $\overline{AE} = 6\,\overline{ED}$;
- A área do quarto é $12\ m^2$.



Determina a área, em metros quadrados, do quadrado [ABCD].

Mostra como chegaste à tua resposta.